Prof. Dr. Uwe Küchler
Dr. Renate Winkler
Institut für Mathematik

Sommersemester 2007

**Stochastik I**

**Lösungsansätze zur 8. Zusatzübung**

1) Es seien $X_1, X_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen, und zwar gleichmäßig verteilt auf $[0,1]$. Weiterhin sei $c \in (0,1)$ fest gewählt. Wir definieren

$$N = \min\{k \geq 1 | X_k > c\},$$
$$X_N = X_n \text{ auf } \{N = n\}.$$

a) Man zeige $P(N < \infty) = 1$.

b) Man bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von $N$ und $X_N$.

c) Sind $N$ und $X_N$ voneinander unabhängig?

**Lösung:** a) Wir zeigen $P(N = \infty) = 0$:
$P(N = \infty) = P(\{X_k \leq c \ \forall k\}) = P(\bigcap_k \{X_k \leq c\}) = \prod_k P(X_k \leq c) = \prod_k c = 0$

b) Es ist $X_{N(\omega)}(\omega) = X_k(\omega)$, falls $N(\omega) = k$, d.h., falls $X_k(\omega) > c$, $X_j(\omega) \leq c \ \forall j < k$.
Wir bestimmen zuerst die gemeinsame Verteilung von $N$ und $X_N$,

$$\begin{aligned} P(N = k, X_N \leq x) &= P(X_1 \leq c, \dots, X_{k-1} \leq c, X_k > c, X_k \leq x) \\ &= P(X_1 \leq c)^{k-1} \cdot P(X_k \in (c, x]) \\ &= c^{k-1} \cdot \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq c \\ (x - c) & \text{für } x \in (c, 1] \\ (1 - c) & \text{für } x > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

und leiten daraus die Verteilungen für $N$ und $X_N$ ab,

$$\begin{aligned} P(N = k) &= P(N = k, X_N < \infty) = c^{k-1} \cdot (1 - c) \\ & \quad \text{(geometrische Verteilung)} \\ P(X_N \leq x) &= \bigcup_{k=1}^{\infty} P(N = k, X_N \leq x) = \sum_{k=1}^{\infty} c^{k-1} \cdot (x - c) = \frac{1}{1 - c} \cdot (x - c) \\ & \quad \text{für } x \in [c, 1] \quad \text{(gleichmäßige Verteilung auf } [c, 1]) \end{aligned}$$

c) $N$ und $X_N$ sind voneinander unabhängig, da ihre gemeinsame Verteilung die Produktverteilung der Randverteilungen ist.

2) $X$ und $Y$ seien Standard-Normalverteilt und unabhängig. Man berechne die Dichte von $Z = \frac{X}{Y}$.
Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Verteilung von $(W, Z)$ mit $W = X$.
(Die Verteilung von $Z$ heißt Cauchyverteilung.)

**Lösung:** Auf der offenen Menge $U := \{(x, y) \in R_2 : x, y \neq 0\}$ betrachten wir die Funktion $h$ mit $h(x, y) = (x, \frac{x}{y})$. Man überprüft die Voraussetzungen der Dichtetransformationsformel, berechnet die Jacobimatrix $\mathscr{J}_h(x, y)$, die Umkehrfunktion $g = h^{-1}$ und deren Jacobimatrix $\mathscr{J}_g(w, z)$:

$$\mathscr{J}_h(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}, \quad g(w, z) = (w, \frac{w}{z}), \quad \mathscr{J}_g(w, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{z} & -\frac{w}{z^2} \end{pmatrix}.$$

Mit der Dichtetransformationsformel erhalten wir für die Dichte $f_{(W,Z)}$ auf $U$:

$$\begin{aligned} f_{(W,Z)}(w, z) &= f_{(X,Y)}(g(w, z)) \cdot |\det \mathscr{J}_g(w, z)| \\ &= \varphi(w) \cdot \varphi(\frac{w}{z}) \cdot \frac{|w|}{z^2} = \frac{1}{2\pi} exp\Big( - \frac{w^2}{2} - \frac{w^2}{2z^2}\Big) \cdot \frac{|w|}{z^2} \end{aligned}$$

Außerhalb $U$ setzen wir diese Dichte Null. Als deren Randverteilung ergibt sich

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} exp\Big( - \frac{w^2}{2}(1 + \frac{1}{z^2})\Big) \cdot \frac{|w|}{z^2} dw = \frac{1}{\pi z^2} \int_0^{\infty} exp\Big( - \frac{w^2}{2}(1 + \frac{1}{z^2})\Big) \cdot w\, dw \\ &= \frac{1}{\pi z^2} \int_0^{\infty} exp\big( - u(\frac{z^2+1}{z^2})\big) du = \frac{1}{\pi(z^2+1)}. \end{aligned}$$

3) $X$ und $Y$ seien unabhängig und geometrisch verteilt mit dem Parameter $p \in (0, 1)$. Man berechne

$$P(X = i | X + Y = n), \quad 0 \leq i \leq n, n \geq 0.$$

**Lösung:**
$P(X = i | X + Y = n) = \frac{P(X=i\,,\, X+Y=n)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=i\,,\, Y=n-i)}{P(X+Y=n)} = \frac{P(X=i) \cdot P(Y=n-i)}{P(X+Y=n)}$

$P(X = i) = p(1-p)^i\,, \quad P(Y = n - i) = p(1-p)^{n-i}$
$P(X+Y = n) = \sum_{i=0}^{n} P(X = i) \cdot P(Y = n-i) = \sum_{i=0}^{n} p^2(1-p)^n = (n+1)p^2(1-p)^n$

$$P(X = i | X+Y = n) = \frac{P(X = i\,,\, X+Y = n)}{P(X+Y = n)} = \frac{p(1-p)^i \cdot p(1-p)^{n-i}}{(n+1)p^2(1-p)^n} = \frac{1}{n+1}.$$