Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

**Statistik stochastischer Prozesse**

**2. Übung, 07. 05. 2008**

1. Die Folge $X^\vartheta = (X_n, n = 1, \ldots, N)$ sei definiert durch
   $X_n = \vartheta X_{n-1} + \varepsilon_n,\ n = 1, 2, \ldots, N,$
   $X_0 \equiv 0,\ (\varepsilon_n)$ unabhängig, $N(0,1)$-verteilte Folge.

   Man berechne die Likelihoodfunktion $L^X(\vartheta, x)$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$.

   Was ergibt sich für die Likelihood-Schätzung $\hat{\vartheta}_n(X_1, \ldots, X_n)$?

   Hinweis: Verwenden Sie die Beziehung

$$\begin{aligned} L^X(\vartheta, x) &= \frac{dP^\vartheta}{dP^0}(x) = \frac{P(X_1 \in dx_1, \ldots, X_n \in dx_n)}{P(\varepsilon_1 \in dx_1, \ldots, \varepsilon_N \in dx_n)} \quad \text{mit} \\ P^\varepsilon(dx) &= P(X^\vartheta \in dx). \end{aligned}$$

2. Es seien $(P_n)$ und $(Q_n), n \geq 1$ Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $Q_n \ll P_n$ und $f_n := \frac{dQ_n}{dP_n}$, weiterhin sei $\varrho_n := \int\limits_\Omega f_n^{\frac{1}{2}} dP_n, n \geq 1$. Man zeige, dass das Produktmaß $Q = \prod\limits_1^\infty Q_n$ bez. dem Produktmaß $P = \prod\limits_1^\infty P_n$ entweder absolutstetig oder singluär ist, je nachdem, ob $\varrho := \prod\limits_1^\infty \varrho_n > 0$ oder $= 0$ gilt. (Dichotomietheorem)
   Hinweis: Man überzeuge sich zunächst von: $\varrho > 0 \Rightarrow g_n = \prod\limits_1^n f_k^{\frac{1}{2}}$ ist Cauchyfolge in $L_2(P)$. $\varrho = 0 \Rightarrow (g_n)$ ist ein nichtnegatives gleichmäßig integrierbares P-Supermartingal.

3. Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ ein statistischer Grundraum und $(N_t, t \geq 0)$ ein Poissonscher Prozeß mit Parameter $\vartheta > 0$ bezüglich $P_\vartheta \in \mathcal{P}$ $(\Theta = (0, \infty))$. Man zeige, dass für $\mathcal{F}_T = \sigma(N_t, t \in [0, T])$ alle $P_\vartheta|_{\mathcal{F}_T}$ zueinander absolutstetig sind und berechne

$$L_T(\vartheta; \omega) = \frac{dP_\vartheta|_{\mathcal{F}_T}}{dP_{\vartheta_0}|_{\mathcal{F}_T}} \quad (\vartheta, \vartheta_0 > 0).$$