Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

4. Übung, 04. 06. 2008

4.1 Es sei $(N_t, t \geq 0)$ ein Poissonprozeß mit dem Parameter $\lambda > 0, (T_n, n \geq 1)$ die Folge seiner Sprungzeiten, $T_0 := 0$. Mit

$$\tau_n := T_n - T_{n-1} (n \geq 1)$$

gilt also: $(\tau_n, n \geq 1)$ ist eine Folge unabhängiger, identisch $Exp(\lambda)$-verteilter Zufallsgrößen und

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

Als kanonischen Wahrscheinlichkeitsraum wählen wir $\Omega = R^N, \tau_n$ sei die n-te Koordinatenabbildung und $\mathfrak{A}_n := \sigma(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n), \mathfrak{A} := \bigvee_{n \geq 1} \mathfrak{A}_n$. P_λ sei diejenige Verteilung auf $\mathfrak{A}$, unter der $(\tau_n, n \geq 1)$ die genannten Eigenschaften besitzt.

a) Man zeige, dass für $\lambda \neq \lambda'$ die Maße P_λ und P_λ auf $\mathfrak{A}$ zueinander orthogonal sind.

b) Man beweise

$$P_\lambda|_{\mathfrak{A}_n} \ll P_1|_{\mathfrak{A}_n}, \quad n \geq 1 \quad \text{und} \quad \frac{dP_\lambda|_{\mathfrak{A}_n}}{dP_1|_{\mathfrak{A}_n}} = \lambda^n \, \mathrm{e}^{(1-\lambda)T_n}.$$

Man bestimme die Maximum-Likelihood-Schätzungen für $E_\lambda \tau_1 = \frac{1}{\lambda}$ und für $EN_1 = \lambda$ auf der Basis der Stichprobe $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$. Sind diese erwartungstreu? Variieren Sie die Schätzungen gegebenenfalls so, dass sie erwartungstreu werden. Berechnen Sie deren Varianzen.

c) Es sei $\mathfrak{F}_t := \sigma(N_s, s \le t),\ t \ge 0$. Man zeige $P_\lambda|_{\mathfrak{F}_t} \ll P_1|_{\mathfrak{F}_t}$ und

$$\frac{dP_\lambda|_{\mathfrak{F}_t}}{dP_1|\mathfrak{F}_t} = \lambda^{N_t}\, \mathrm{e}^{(1-\lambda)t}, \quad t \ge 0.$$

Man bestimme die Maximum-Likelihood-Schätzung für $E_\lambda \tau_1 = \frac{1}{\lambda}$ und $E_\lambda N_1 = \lambda$ auf der Basis der Stichprobe $(N_s, s \le t)$. Untersuchen Sie beide Schätzungen auf Erwartungstreue und berechnen Sie gegebenenfalls ihre Varianz.

4.2 n Maschinen starten zur gleichen Zeit. Sie fallen unabhängig voneinander aus, ihre Ausfallzeiten $T_k, k = 1, \ldots, n$, seien sämtlich exponential verteilt mit dem Erwartungswert $\vartheta > 0$. Um ϑ zu schätzen, werden die ersten r Ausfälle beobachtet, sie geschehen zu den zufälligen Zeiten $T_{(1)}, T_{(2)} \ldots T_{(r)}$, wobei $T_{(k)}$ die Zeit des k-ten Ausfalls bezeichnet $k = 1, 2, \ldots, r$.
Berechnen Sie die Verteilung des Vektors $(T_{(1)}, T_{(2)} - T_{(1)}, \ldots, T_{(r)} - T_{(r-1)})$ und zeigen Sie, dass seine Komponenten unabhängig sind.
Geben Sie die Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\vartheta}_r$ für ϑ an und zeigen Sie, dass $\hat{\vartheta}_r$ erwartungstreu ist.

4.3 Es sei $\Omega = \mathbb{R}^N$ der Raum aller reellwertigen Folgen mit der Produkt-Borel-σ-Algebra $\mathfrak{A} = (\mathscr{B}_\mathbb{R})^{\otimes N}$. Weiterhin seien die Produktmaße $\mathbb{P} = \otimes_{k=1}^\infty \mathbb{P}_k$ und $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_1^{\otimes N}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ gegeben, wobei $\mathbb{Q}_1$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R})$ zur $N(0,1)$-Verteilung sowie $\mathbb{P}_k$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R})$ zur $N(\mu_k, 1)$-Verteilung bezeichnet.

a) Zeigen Sie: Die Projektionen $X_k : \Omega \to \mathbb{R}, X_k((\omega_n)_{n\ge1}) := \omega_k$ definieren eine Folge $(X_k)_{k\ge1}$ von Zufallsgrößen, die bezüglich $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ jeweils unabhängig ist.

b) Setzt man

$$\mathfrak{A}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n) = \{\{\omega \in \Omega | (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)) \in B\} | B \in \mathscr{B}_n\},$$

so bildet $(\mathfrak{A}_n)_{n\ge1}$ eine Filtration. Beweisen Sie, dass gilt $\mathbb{P}|\mathfrak{A}_n \ll \mathbb{Q}|\mathfrak{A}_n$.

c) Berechnen Sie die Likelihood-Funktion $L_n = \frac{dP|\mathfrak{A}_n}{d\mathbb{Q}|\mathfrak{F}_n}$.

d) Zeigen Sie: $(L_n)_{n\geq 1}$ konvergiert $\mathbb{Q}$-fast sicher gegen eine Zufallsgröße L_∞ und bestimmen Sie deren Verteilung bez. Q. Es gilt folgende Dichotomie:

$$(1)\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 < \infty : \quad L_n \xrightarrow[n\to\infty]{L^1(\mathbb{Q})} L_\infty,\ \frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = L_\infty,$$

$$(2)\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 = \infty : \quad L_\infty = 0\ \mathbb{Q}-f.s. \quad L_\infty = \infty \quad P-f.s., \quad P\perp Q,$$

Die Aufgaben 4.1 und 4.3 sind schriftlich anzufertigen und in der Übung am Mittwoch, dem 04. 06. 2008 abzugeben.