Prof. Dr. Uwe Küchler
Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse
2. Übung, 02. 05. 2005

1. Es sei $(Z_n, n \geq 0)$ ein Verzweigungsprozess mit der Nachkommensverteilung $p_j(\vartheta) = \frac{\vartheta^i p_j}{[\varphi(\vartheta)]^j}, j \geq 0$ mit $\sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j = 1$ und $\vartheta \in \Theta := \Big\{ \sum\limits_{j \geq 0} \vartheta^j p_j =: \varphi(\vartheta) < \infty \Big\}$.
Das bedeutet, Z_n ist die Anzahl der Individuen in einer bestimmten Population zur Zeit n (d.h., in der n-ten Generation). Jedes Individuum erzeugt in einer Zeiteinheit unabhängig von den anderen und von der Vergangenheit eine zufällige Anzahl von neuen Individuen, diese Anzahl habe die Verteilung $(p_j(\vartheta),\ j \geq 0)$, der Parameter ϑ sei unbekannt. Zum Zeitpunkt Null seien i_0 Individuen vorhanden. Man berechne:

   a) Die Likelihoodfunktion
   $L_n(\vartheta; i_1, i_2, \ldots, i_n) = P_\vartheta(Z_1 = i_1, Z_2 = i_2, \ldots, Z_n = i_n)$

   b) $E_\vartheta Z_n,\ Var_\vartheta(Z_n)$

   c) Man gebe eine Maximum-Likelihood Schätzung für $\mu(\vartheta) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k p_k(\vartheta)$ an.

   d) Eine Maximum-Likelihood Schätzung für ϑ

2. Es sei $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ eine Markovsche Kette auf dem Zustandsraum $\{0,1\}$ mit $X_0 = i_0 \in \{0,1\}$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_0 = I\!P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0), q_0 = I\!P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0), p_1 = I\!P(X_{x+1} = 0 | X_n = 1)$ und $q_1 = I\!P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1)$.
Stellen Sie die Likelihoodfunktion auf und bestimmen Sie Maximum-Likelihood-schätzungen für p_0, q_0, p_1, q_1.

3. Es seien $(N(t), t \geq 0)$ ein Poissonprozess mit dem Parameter $\lambda > 0, (Y_k, k \geq 1)$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrössen mit der stückweise stetigen Dichte $f_\vartheta(\cdot), (\vartheta \in \Theta \subseteq R^1)$, die auch unabhängig von $(N(t),\ t \geq 0)$ seien. Es gelte: $\{f_\vartheta > 0\}$ ist unabhängig von ϑ. Durch
$X(t) = \sum\limits_{k=1}^{N(t)} Y_k,\ t > 0$
ist ein sogenannter *zusammengesetzter Poissonprozess* $X = (X(t),\ t \geq 0)$ definiert.

   a) Skizzieren Sie eine "typische" Trajektorie von $X(\cdot)$.

   b) Bestimmen Sie den Likelihood-Prozess $L_T(\vartheta, \vartheta_0, X)$. (formale Rechnung genügt)

   c) Wie berechnet man den Maximum-Likelihood Schätzer für (λ, ϑ)?