Prof. Dr. Uwe Küchler

Institut für Mathematik

Statistik stochastischer Prozesse

5. Übung, 27. 06. 2005

1. Es sei $(X_n, n \geq 0)$ ein autoregressiver Prozeß erster Ordnung mit Gaußschem Rauschen, d.h. es gelte
   $X_{n+1} = \alpha X_n + \varepsilon_{n+1}, n \geq 0$
   mit $X_0 \sim N(\mu, \sigma_0^2)$, (ε_n) unabhängig identisch $N(0, \sigma^2)$-verteilt, $X = (X_0, X_1, \ldots, X_n)$.
   Man bestimme eine suffiziente Statistik für α, als Funktion von X.

2. Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{P}, X)$ ein statistisches Modell mit $\mathcal{P} = (P_\vartheta, \vartheta \in \Theta)$ und es sei $H(X)$ eine erwartungstreue Schätzung für $\gamma(\vartheta)$:
   $\mathrm{E}_\vartheta H(X) = \gamma(\vartheta), \ \vartheta \in \Theta$.
   $\mathcal{H}$ sei eine suffiziente σ-Algebra für $\mathcal{P}$ bez. $\mathfrak{A}^X$.
   Man zeige, daß $H_1 = \mathrm{E}_\vartheta(H(X)|\mathcal{H})$ eine erwartungstreue Schätzung für $\gamma(\vartheta)$ ist, deren Varianz die von $H(X)$ nicht übersteigt.

3. Ist $PP(\lambda)$ eine Poissonverteilung mit dem Parameter $\lambda > 0$ und $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ eine mathematische Stichprobe vom Umfang n aus einer $PP(\lambda)$-verteilten Grundgesamtheit, so gebe man eine suffiziente Statistik $T = T(X)$ für λ hinsichtlich X an und wende Aufgabe 3. auf $H(X) = \mathbb{1}_{\{0\}}(X_1)$ an.

4. Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathcal{P})$ ein statistischer Grundraum mit $\mathcal{P} = (P_\lambda, \lambda > 0)$ und $(N_t, t \geq 0)$ unter P_λ, ein Poissonscher Prozeß mit dem Parameter λ. Man zeige, daß für jedes $T > 0$ die letzte Beobachtung $N(T)$ suffizient ist für $\mathcal{P}$ hinsichtlich $\mathfrak{A}_t = \sigma(N_s, s \leq t)$.