Prof. Dr. Uwe Küchler Wintersemester 2007/2008

Risikotheorie

1. Übungsserie

1.1 Es seien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ unabhängige Zufallsgrößen mit dem Erwartungswert $ET_k = t, k = 1, \ldots, n$. Die Varianzen $\sigma_k^2 = E(T_k - t)^2$ seien endlich und bekannt. Man bestimme diejenige Schätzung der Form $T = \sum\limits_1^n w_k T_k$, die die minimale Varianz besitzt. Dabei sollen die Gewichte w_k nichtnegative Zahlen mit $\sum\limits_1^n w_k = 1$ sein. Wann ergibt sich $w_k \equiv \frac{1}{n}$?

1.2 Es sei X eine Gammaverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $\lambda, \alpha > 0$, d.h. mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Symbolisch: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

a) Man berechne die Laplace-Transformierte der $\Gamma(\alpha, \lambda)$-Verteilung.

b) Man zeige, dass für $\lambda, \alpha, \beta > 0$ gilt:

$$\Gamma(\alpha, \lambda) * \Gamma(\beta, \lambda) = \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$$

c) Man zeige: $cX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{c})(c > 0)$ und bestimme $EX^k, k \geq 1$ sowie D^2X.

d) Verschaffen Sie sich einen Überblick über die Form der Dichten in Abhängigkeit von λ und α und bestimmen Sie den Modalwert der $\Gamma(\alpha, \lambda)$-Verteilung.

e) Man überlege sich, gegen welche Verteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$ konvergiert, wenn λ und α gegen Unendlich konvergieren, wobei $\frac{\alpha}{\lambda} = c > 0$ konstant ist.

f) Es sei $X_n \sim \Gamma(\alpha n, \lambda)$. Welche Grenzverteilung hat $(X_n - EX_n) \cdot n^{-\frac{1}{2}}$ für $n \to \infty$?

1.3 Für eine Folge $(T_k)_{k \in N}$ von unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda > 0$ definiere

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} T_k, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad N(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_k \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

Man zeige, dass $N(t)$ Poisson-verteilt zum Parameter λt ist und dass die bedingte Verteilung von $(S(1), \ldots, S(n))$ unter $\{N(t) = n\}$ die gleichmäßige Verteilung auf dem Simplex

$$\triangle_{n,t} := \{(s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \ldots \leq s_n \leq t\}$$

ist.

1.4 Es seien n voneinander unabhängige Risiken $R_i = (i = 1, 2, \ldots, n)$ im Bestand. Alle mögen die gleiche Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} (1 - \vartheta) + \vartheta \tilde{F}(x), & x \geq 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

besitzen, wobei $\tilde{F}$ eine Verteilungsfunktion mit $\tilde{F}(0) = 0$ ist.
Man zeige:

a) $\vartheta = P(R_i > 0)$

b) $\tilde{F}(x) = P(R_1 \leq x | R_i > 0), \quad x > 0$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße $N :=$ "Anzahl der Risiken R_i mit $R_i > 0$".