Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.Math. Hagen Gilsing

Wintersemester 2007/2008

Risikotheorie

5. Übungsserie

5.1 *(2 Punkte)* Eine Gesamtschadensverteilung $S = \sum_{k=0}^{N} X_i$ möge aus voneinander unabhängigen, identisch verteilten Schadenshöhen $\{ X_k \}_{k \geq 1}$ und einer davon unabhängigen Schadensanzahl $N \sim \mathbf{p} = (p_n)_{n \geq 1}$ gegeben sein. Dann gilt die Gleichung $L_S = \varphi_N(L_{X_1}(u))$, $u \in [0, \infty)$, (siehe Vorlesung).

a) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{p}$, die dem Panjer-Schema ($\forall\, n \geq 0 : \; p_{n+1} = (\, a + \frac{b}{n+1}\,)\, p_n$) genügen, die Laplacetransformierten L_S und L_{X_1} der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$L'_S(u) \;=\; a\, L_{X_1}(u)\, L'_S(u) + (a+b)\, L'_{X_1}(u)\, L_S(u), \quad u \in (0, \infty)$$

genügen.

b) Zeigen Sie, dass für $\mathbf{p}$, die dem Panjer-Schema erst ab einem gewissen $m \geq 0$ genügen ($\forall\, n \geq m : \; p_{n+1} = (\, a + \frac{b}{n+1}\,)\, p_n$), die Laplacetransformierten L_S und L_{X_1} der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} L'_S(u) \;&=\; a\, L_{X_1}(u)\, L'_S(u) + (a+b)\, L'_{X_1}(u)\, L_S(u) + g(u), \quad u \in (0, \infty) \\ \text{mit} \quad g(u) \;&=\; \sum_{n=0}^{m-1} (\, p_{n+1} - (a + \tfrac{b}{n+1})\, p_n\,)\, \tfrac{d}{du} L_{X_1}^{n+1}(u), \qquad u \in (0, \infty) \end{aligned}$$

genügen.

5.2 *(4 Punkte)* Es sei $\mathbb{T} = [0, \infty)$. Es sei ferner $N = (N(t), t \in \mathbb{T})$ ein Poissonprozess mit der Intensität $\lambda \in (0, \infty)$ und den Ereigniszeiten $\{S_n\}_{n \geq 1}$.

a) Man bilde den neuen stochastischen Prozess $N_1 = (N_1(t), t \in \mathbb{T})$ durch

$$N_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[S_{2k}, \infty)}(t), \qquad t \in \mathbb{T}$$

Ist dieser Prozess ein Poissonprozess ?

b) Man bilde den neuen stochastischen Prozess $N_2 = (N_2(t), t \in \mathbb{T})$, indem jede Ereigniszeit mit der Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ unabhängig von N und unabhängig voneinander entfernt wird.

Ist N_2 ein Poissonprozess ?

5.3 *(4 Punkte)* Es seien $\mathbb{T} = [0, \infty)$ und $N = (N(t), t \in \mathbb{T})$ ein Poissonprozess der Intensität $\lambda \in (0, \infty)$.

Zeigen Sie, dass N ein Prozess mit unabhängigen Zuwächsen ist.

Hinweis: In Aufgabe 1.3 wurde gezeigt, dass $P^{(S_1, .., S_n) | N(t) = n}$ die Gleichverteilung auf dem Simplex $\Delta_{n,t}$ ist. Stellen Sie $\{ N(t_1) = k_1, .., N(t_n) - N(t_{n-1}) = k_n \}$ als Ereignis in $\{ S_i \}_{i \geq 1}$ dar, bedingen Sie die Wahrscheinlichkeit und benutzen Sie die expliziten Darstellungen der resultierenden Wahrscheinlichkeiten.

5.4 *(4 Punkte)* Es sei $\{ T_k \}_{k\geq 1}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsgrössen mit Werten in $(0,\infty]$. Es seien ferner $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k$, F definiert auf $\mathbb{R}$ durch $F(t) = \mathbb{P}[T_1 < t]$, sowie $\|F\| = \lim_{t\mapsto\infty} F(t) = \mathbb{P}[T_1 < \infty]$. Man beweise:

a) Wenn $\|F\| = 1$, dann gilt:

$$\forall\, n \geq 1 : \;\; \mathbb{P}[S_n < \infty] = 1$$

und

$$\mathbb{P}[\lim_{n\mapsto\infty} S_n = \infty] = 1.$$

Weiterhin gilt mit $N(t) = \#\{ k \geq 1 \,|\, S_k \leq t \}$:

$$\mathbb{P}[\, \lim_{n\mapsto\infty} N(t) = \infty \,] = 1\,.$$

b) Wenn $\|F\| < 1$, so ist $T = \min\{ k \geq 0 \,|\, T_{k+1} = \infty \}$ eine $\mathbb{P}$-f.s. endliche Zufallsgrösse.

Man bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von T, S_T und zeige, dass

$$\mathbb{P}[\, \lim_{t\mapsto\infty} N(t) = S_T < \infty \,] = 1$$

gilt.