Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Markov'sche Prozesse

1. Übungsserie

<u>1.1</u> Ist $(\varepsilon_n, n \geq 1)$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen mit $\varepsilon_1 \sim N(0,1)$, und definiert man für $\alpha \in R_1$

$$X_0 = \varepsilon_0 \text{ sowie } X_n = \alpha X_{n-1} + \varepsilon_n,\ n \geq 1,$$

so ist $(X_n, n \geq 0)$ ein Markov'scher Prozess. Man bestimme die Übergangsfunktion in n Schritten $P_n(x, B)$. Was kann man für den Fall $n \to \infty$ aussagen? Existiert eine stationäre Anfangsverteilung? Ist sie gegebenenfalls eindeutig?

<u>1.2</u> Es sei $(X_t, t \in T)$ ein Markov'scher Prozess. Man zeige, dass die σ-Algebren

$$\mathfrak{A}_t^0 := \sigma(X_s, s \leq t) \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}_{\geq t}^0 = \sigma(X_s, s \geq t)$$

unter der Bedingung X_t unabhängig sind, d.h., es gilt

$$P(A \cap B | X_t) = P(A|X_t) P(B|X_t) \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{A}_t^0, B \in \mathfrak{A}_{\geq t}^0. \qquad (*)$$

Umgekehrt zeige man, dass aus $(*)$ die Markoveigenschaft für X folgt:

$$P(B|\mathfrak{A}_t^0) = P(B|X_t) \quad P-\text{f.s.},\ B \in \mathfrak{A}_{\geq t}^0, t \in T.$$

<u>1.3</u> (4 Punkte) Berechnen Sie für die stochastische Matrix

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \quad (a, b \in [0,1] \text{ und } ab > 0)$$

die Potenzen $\mathbb{P}^n, n \geq 2$. Welche Aussagen kann man für $n \to \infty$ treffen? Ermitteln Sie eine stationäre Anfangsverteilung. Ist sie eindeutig?

<u>1.4</u> (4 Punkte) Es sei $(B_t, t \in R_1)$ eine Standard Brownsche Bewegung, $\lambda > 0$ und $X_t = \mathrm{e}^{-\lambda t} B_{\exp(2\lambda t)}, t \in R_1$. Man zeige, dass $(X_t, t \in R_1)$ ein Markov'scher Prozess ist und berechne seine Übergangsfunktion.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Freitag, dem 24.10.2008, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.