Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Markov'sche Prozesse

2. Übungsserie

2.1 Es sei $(S_n, n \geq 0)$ die symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$, d. h. $S_0 := 0, S_{n+1} := S_n + X_{n+1}$ mit unabhängigen Zufallsgrößen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und $\mathbb{P}(X_i = +1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$.

a) Zeigen Sie, dass $(D_n, n \geq 0)$ mit $D_n := |S_n|$ ein Markov'scher Prozess ist und bestimmen Sie seine Übergangsfunktion.

b) Man setzt $M_n := \max_{0\leq k\leq n} S_k$. Weisen Sie nach, dass $(M_n, n \geq 0)$ kein Markov'scher Prozess ist.

c) Ist der Prozess $(M_n - S_n, n \geq 0)$ Markovsch?

2.2 Es sei $(\Omega, \mathfrak{A}) := ((0,\infty), \mathfrak{B}((0,\infty)))$, und τ bezeichne die Zufallsgröße mit $\tau(\omega) = \omega$. Dann wird durch $X_t := 1_{\{\tau\leq t\}}, t \geq 0$, ein stochastischer Prozess definiert.

a) Bestimmen Sie die zugehörige kanonische Filtration $\mathfrak{A}_t^X$, $t \geq 0$.

b) Zeigen Sie, dass $(X_t, t \geq 0)$ mit dieser Filtration stets ein Markov'scher Prozess ist und bestimmen Sie die Übergangsfunktion.

c) Für welche Verteilung von τ ist $(X_t, t \geq 0)$ sogar ein zeitlich homogener Markov'scher Prozess?

Hinweis: Man leite eine Funktionalgleichung für $f(t) = \mathbb{P}(\tau > t)$ her.

2.3 (5 Punkte) Die geometrische Brownsche Bewegung $(X_t, t \geq 0)$ ist als Funktion der Standard Brownschen Bewegung $(W_t, t \geq 0)$ für $\alpha \geq 0$, $r \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$X_t := \exp(\alpha W_t + (r - \tfrac{\alpha^2}{2})t), \quad t \geq 0.$$

a) Begründen Sie, weshalb $(X_t, t \geq 0)$ ein Markov'scher Prozess ist.

b) Bestimmen Sie die Übergangsfunktion $P(s, x; t, B)$ für alle $t \geq s \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$ und Borel-Mengen B durch Angabe einer Übergangsdichte $p(s, x; t, y)$ mit

$$\mathbb{P}(X_t \in B | X_s = x) = \int_B p(s, x; t, y)\, dy$$

c) Weisen Sie das folgende asymptotische Verhalten für $h \downarrow 0$, $t \geq 0$, nach:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) &= o(h) \quad \text{für alle } \varepsilon > 0, \\ \mathbb{E}(X_{t+h} - X_t | X_t = x) &= (rx)h + o(h), \\ \mathrm{Var}(X_{t+h} - X_t | X_t = x) &= (\alpha^2 x^2)h + o(h). \end{aligned}$$

<u>2.4</u> (5 Punkte) Es seien $\lambda > 0$ und $P = (p_{ij})$ eine stochastische Matrix mit $p_{ii} \equiv 0$.

a) Man zeige, dass durch

$$p_{ij}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} p_{ij}^{(k)} \qquad (*)$$

eine zeitlich homogene Übergangsfunktion mit stetiger Zeit gegeben ist. Hierbei bezeichnet $p_{ij}^{(k)}$ den Eintrag an der Stelle (i,j) in der Matrix P^k.

b) Man berechne die Limites

$$\lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t), \quad q_{ij} := \lim_{t \downarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t} = \left. \frac{dp_{ij}(t)}{dt} \right|_{t=0}$$

und gebe Eigenschaften der Matrix $Q = (q_{ij})$ an.

c) Es sei $(Y_k, k \geq 0)$ eine Markov-Kette mit der Übergangsmatrix P und der Anfangsverteilung μ. Ferner sei $(N_t, t \geq 0)$ ein davon unabhängiger Poisson-Prozess mit der Intensität λ. Man zeige, dass

$$X_t := Y_{N_t}, \quad t \geq 0,$$

ein Markov'scher Prozess mit der Übergangsfunktion $p_{ij}(t)$ aus $(*)$ und der Anfangsverteilung μ ist.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Freitag, dem 7.11.2008, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.