Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Markov'sche Prozesse

3. Übungsserie

3.1 Ein Gauß'scher Prozess $(X_n, n \geq 0)$ mit $EX_n = 0$, $n \geq 0$, ist genau dann Markov'sch wenn für alle $n \geq 1$

$$E(X_n|X_{n-1}, \ldots, X_1, X_0) = E(X_n|X_{n-1}) \quad P\text{-f. s.}$$

gilt.

3.2 Es sei $(P_t, t \geq 0)$ eine Feller'sche Übergangsfunktion auf $\mathbb{C}_0(E)$, und R_λ bezeichne den zugehörigen Resolventenoperator der Ordnung $\lambda > 0$:

$$R_\lambda f(x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t f(x)\, dt, \quad f \in \mathbb{C}_0(E), x \in E.$$

Man zeige, dass für $(R_\lambda, \lambda > 0)$ die Resolventengleichung gilt:

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda \quad \text{für alle } \lambda, \mu > 0.$$

3.3 (4 Punkte) Es sei $(P_t, t \geq 0)$ eine Übergangsfunktion auf einem metrischen Raum E. Beweisen Sie, dass $(P_t, t \geq 0)$ genau dann stochastisch stetig ist, (d.h. es gilt $\lim_{t\downarrow 0} P_t(x, E \backslash U) = 0$ für jede Umgebung U von x), wenn

$$\lim_{t\downarrow 0} P_t f(x) = f(x) \quad \text{für alle } x \in E, f \in \mathbb{C}_0(E).$$

3.4 (3 Punkte) Zeigen Sie, dass jeder stochastisch stetige Prozess auf dem Zustandsraum $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$ mit unabhängigen stationären Zuwächsen Feller'sch ist.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Freitag, dem 21.11.2008, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.