Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Markov'sche Prozesse

5. Übungsserie

5.1 Es sei $(X_t, t \geq 0)$ ein zentrierter reellwertiger Gauß'scher Prozess.

a) Beweisen Sie, dass $(X_t, t \geq 0)$ genau dann ein Markov'scher Prozess ist, wenn seine Kovarianzfunktion $K(s,t) = E(X_s X_t)$ die Eigenschaft

$$K(s,u)K(t,t) = K(s,t)K(t,u) \quad \text{für alle } s \leq t \leq u$$

besitzt.

b) Der Prozess $(X_t, t \geq 0)$ heißt eine *fraktionale Brownsche Bewegung* (fBB) mit dem Hurst-Parameter $H \in (0,1)$, falls für seine Kovarianzfunktion gilt:

$$K(s,t) = \tfrac{1}{2}\sigma^2[s^{2H} + t^{2H} - |s-t|^{2H}].$$

i) Zeigen Sie, dass eine fBB $(X_t)_{t\geq 0}$ nur im Fall $H = \frac{1}{2}$ ein Markov'scher Prozess ist. Um welchen Prozess handelt es sich?

ii) Ein Prozess $(Y_t)_{t\geq 0}$ heißt $\widetilde{H}$-selbstähnlich, wenn für $\widetilde{H} > 0$ und jedes $a > 0$

$$(Y_{at})_{t\geq 0} \stackrel{d}{=} (a^{\widetilde{H}} Y_t)_{t\geq 0}$$

gilt. Beweisen Sie, dass eine fBB H-selbstähnlich ist.

iii) Zeigen Sie, dass eine fBB stationäre Inkremente besitzt.

iv) Beweisen Sie, dass umgekehrt jeder H-selbstähnliche Gauß'sche Prozess, $H \in (0,1)$, mit stationären Inkrementen eine fBB darstellt.

v) Zeigen Sie mithilfe des Kriteriums von Kolmogorow, dass eine fBB eine stetige Version besitzt.

c) Für $\alpha, \beta > 0$ sei die Kovarianzfunktion gegeben durch

$$K(s,t) = \alpha \exp(-\beta|t-s|), \quad s,t \geq 0.$$

Dann heißt $(X_t)_{t\geq 0}$ *stationärer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess*. Zeigen Sie:

i) Der stationäre Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ist der einzige stationäre zentrierte Gauß'sche Markov-Prozess.

ii) Die Übergangsfunktion $(P_t)_{t\geq 0}$ ist gegeben durch die Übergangsdichten

$$p_t(x,y) = (2\pi\alpha(1-e^{-2\beta t}))^{-1/2} \exp(-(y-e^{-\beta t}x)^2/(2\alpha(1-e^{-2\beta t}))), \quad t \geq 0.$$

iii) Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung. Ist die Zufallsgröße $Y \sim N(0, \frac{1}{2\beta})$ unabhängig von $(B_t)_{t\geq 0}$, so ist

$$Y_t := e^{-\beta t}(Y + \int_0^t e^{\beta s}\, dB_s), \quad t \geq 0,$$

ein stationärer Ornstein-Uhlenbeck-Prozess.

d) Ist $(B_t)_{t\geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung, so heißt der Prozess $Z_t := B_t - tB_1$, $t \in [0,1]$, *Brownsche Brücke* zwischen 0 und 0. Zeigen Sie, dass $(Z_t)_{t\in[0,1]}$ sowohl Gauß'sch als auch Markov'sch ist.

5.2 Beweisen Sie das folgende Resultat von Blackwell, Dubins und Hunt, welches den Konvergenzsatz von Lebesgue und den Konvergenzsatz für gleichgradig integrierbare Martingale in sich vereinigt: Es sei $(X_n)_{n=0,1,\dots}$ eine Folge von Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$X_n \to X_\infty \quad P\text{-f. s.}, \qquad \sup_n |X_n| \in \mathcal{L}^1(P),$$

$(\mathcal{A}_n)_{n=0,1,\dots}$ eine Filtration, $\mathcal{A}_\infty := \sigma\left(\cup_n \mathcal{A}_n\right)$. Man zeige

$$\lim_{n\uparrow\infty} E(X_n \,|\, \mathcal{A}_n) = E(X_\infty \,|\, \mathcal{A}_\infty) \qquad P\text{-f. s.}$$

oder sogar die stärkere Aussage

$$\lim_{n,m\uparrow\infty} E(X_n \,|\, \mathcal{A}_m) = E(X_\infty \,|\, \mathcal{A}_\infty) \quad P\text{-f. s..}$$

5.3 (5 Punkte)

a) Für $\mu > 0$ sei die Funktion $P_t(x,B)$ $(t \geq 0, x \in [0,\infty), B \in \mathcal{B}([0,\infty)))$ gegeben durch

$$P_t(x,B) = \begin{cases} 1_B(x+t) & \text{falls } x > 0, \\ 1_B(0)\,\mathrm{e}^{-\mu t} + \displaystyle\int_0^t \mu \mathrm{e}^{-\mu s} 1_B(t-s)\,ds & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Übergangsfunktion auf $([0,\infty), \mathcal{B}([0,\infty)))$ ist.

b) Geben Sie einen stetigen Markov'schen Prozess $(\Omega, \mathcal{A}, (X_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x\geq 0})$ an, der diese Übergangsfunktion besitzt.

c) Zeigen Sie, dass $(X_t, t \geq 0)$ nicht Feller'sch ist. Geben Sie eine Stoppzeit an, für die die starke Markov-Eigenschaft verletzt ist.

5.4 (4 Punkte) Es seien $(\mathcal{A}_t^0, t \geq 0)$ eine Filtration in $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $\mathcal{A}_\infty^0 := \sigma(\bigcup_{t\geq 0} \mathcal{A}_t^0)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \{A \subseteq \Omega \,|\, \exists\, A' \in \mathcal{A}_\infty^0 \text{ mit } A \subseteq A' \text{ und } P(A') = 0\}, \\ \mathcal{A}_t &:= \sigma(\mathcal{A}_t^0 \cup \mathcal{N}), \quad t \in [0,\infty]. \end{aligned}$$

Man zeige, dass gilt:

a) $\mathcal{A}_\infty = \{A \subseteq \Omega \,|\, \exists\, A', A'' \in \mathcal{A}_\infty^0 : A' \subseteq A \subseteq A'', P(A'' \setminus A') = 0\}$

b) $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ ist $\mathcal{A}_\infty$-messbar genau dann, wenn es zwei $\mathcal{A}_\infty^0$-messbare Zufallsgrößen Z', Z'' gibt mit $Z' \leq Z \leq Z''$ P-f. s. und $P(Z'' - Z' > 0) = 0$.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Freitag, dem 19.12.2008, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.