Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Markov'sche Prozesse

6. Übungsserie

Im Folgenden sei $(\mathbb{P}(t), t \geq 0)$ eine Familie von Standard-Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(t) = (p_{ij}(t))_{i,j \in E}$ mit $q_i < \infty$, $i \in E$, und $X = (X_t, t \geq 0)$ bezeichne eine Markov'sche Kette mit $(\mathbb{P}(t), t \geq 0)$ als Familie von Übergangswahrscheinlichkeiten. Im Übrigen verwenden wir die Bezeichnungen der Vorlesung vom 19.12.2008.

6.1 Man zeige, dass $p_{ii}(t) > 0$ für alle $t > 0$ gilt.

6.2 (6 Punkte) Es bezeichne ζ_n den Zeitpunkt des n-ten Sprungs der Kette X. Wir definieren $\zeta := \lim_{n\uparrow\infty} \zeta_n$. Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten:

a) $g_i(u) := E_i[e^{-u\zeta}] = E_i[\prod_{k=1}^{\infty} \frac{q_{\widehat{X}_{k-1}}}{u+q_{\widehat{X}_{k-1}}}]$

b) Die Funktion $(u, i) \mapsto g_i(u), u \geq 0, i \in E$, genügt der Gleichung

$$g_i(u) = \tfrac{q_i}{u+q_i} \sum_{j \in E} \pi_{ij}\, g_j(u) \qquad (*)$$

c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i) Es gilt $P_i(\zeta = \infty) = 1$ für alle $i \in E$.

ii) Die Gleichung $(*)$ besitzt keine beschränkte nichtnegative Lösung, die nicht identisch 0 ist.

6.3 (4 Punkte) Es sei $(X_t, t \geq 0)$ ein "reiner Geburtsprozess", d. h., es gelte $q_i > 0$, $i \geq 0$, $\pi_{ij} = 1$ für $j = i + 1$, $i \geq 0$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

i) Ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty$, so gilt $P_i[\zeta < \infty] = 1$.

ii) Ist $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{q_i} = \infty$, so folgt $P_i[\zeta = \infty] = 1$.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Freitag, dem 16.01.2009, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.