Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Markov'sche Prozesse

7. Übungsserie

Im den folgenden Aufgaben sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Markov'sche Kette auf dem Zustandsraum E bezüglich $(P_i, i \in E)$ und der Familie von Standard-Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(t) = (p_{ij}(t))_{i,j\in E}$, $t \geq 0$. Die zugehörige Intensitätsmatrix A sei konservativ. Im Übrigen verwenden wir die Bezeichnungen der Vorlesung vom 19.12.2008 und definieren zusätzlich $\zeta := \lim_{n\uparrow\infty} \zeta_n$ als Limes der Sprungzeiten.

7.1 Für die Markov'sche Kette gilt $P_i[\zeta = \infty] = 1$, falls eine der nachfolgenden Bedingungen erfüllt ist:

i) E ist endlich,

ii) $\sup_{j\in E} q_j < \infty$,

iii) Der Zustand i ist rekurrent für die Sprungkette $(\widehat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

7.2 Wie in Aufgabe 6.2 bezeichnet $g_i(u) := E_i[e^{-u\zeta}]$, $u \geq 0$, die Laplace-Transformierte von ζ unter dem Maß P_i. Zeigen Sie:

a) Für jedes $u > 0$ erfüllt der Vektor $z = (g_i(u), i \in E)$ die Bedingungen:

$$1)\ |z_i| \leq 1 \quad \text{und} \quad 2)\ Az = uz.$$

Ist $\widetilde{z}$ ein weiterer Vektor mit 1) und 2), so folgt $\widetilde{z}_i \leq z_i$ für alle $i \in E$.

b) Für jedes $u > 0$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

i) Es gilt $P_i[\zeta = \infty]$ für alle $i \in E$.

ii) Aus $A\widetilde{z} = u\widetilde{z}$ und $|\widetilde{z}_i| \leq 1$ für alle $i \in E$ folgt $\widetilde{z} = 0$.

7.3 Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die minimale Lösung der *Kolmogorov'schen Rückwärtsgleichung* erfüllt die Gleichung $\overline{p}_{ik}(t) = P_i[X_t = k, \zeta > t]$ für alle $i, k \in E$, $t \geq 0$.

b) Die Lösung der *Kolmogorov'schen Rückwärtsgleichung* ist eindeutig genau dann, wenn $P_i[\zeta = \infty] = 1$ für alle i gilt.

7.4 Man berechne die Lösung der *Kolmogorov'schen Rückwärtsgleichung* für die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

7.5 (6 Punkte) Für jede endliche Matrix $B = (b_{ij})_{i,j \in E}$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!}$ komponentenweise, und der Grenzwert wird mit e^B bezeichnet. Wir definieren $P(t) := e^{tB}$, $t \geq 0$, für eine endliche Matrix B. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

a) Für alle $s, t \geq 0$ gilt $P(t+s) = P(s)P(t)$ (*Halbgruppeneigenschaft*).

b) Die Familie $(P(t), t \geq 0)$ ist die eindeutige Lösung der *Kolmogorov'schen Vorwärtsgleichung*

$$\tfrac{d}{dt} P(t) = P(t)B, \quad P(0) = I.$$

c) Die Familie $(P(t), t \geq 0)$ ist die eindeutige Lösung der *Kolmogorov'schen Rückwärtsgleichung*

$$\tfrac{d}{dt} P(t) = BP(t), \quad P(0) = I.$$

d) Für $k = 0, 1, 2, \ldots$ gilt $(\frac{d}{dt})^k|_{t=0} P(t) = B^k$.

e) $P(t)$ ist eine stochastische Matrix für jedes $t \geq 0$ genau dann, wenn B eine Intensitätsmatrix ist.

f) Es sei $(P(t), t \geq 0)$ eine Familie von Übergangsmatrizen einer Markov'schen Kette. Der Vektor π mit $\pi_j \geq 0$, $\sum_{j \in E} \pi_j = 1$ und $\pi = \pi P(t)$ für alle $t \geq 0$ heißt stationäre Verteilung der Kette. Hierbei gilt

$$\pi = \pi P(t) \quad \text{für alle } t \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \pi B = 0.$$

7.6 (3 Punkte) Berechnen Sie die Lösung der Kolmogorov'schen Rückwärtsgleichung $\frac{d}{dt} P(t) = AP(t)$ für die endliche Intensitätsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ & -\lambda & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda & \lambda \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen und oberhalb der ersten oberen Nebendiagonalen 0 sind. Welcher Markov-Prozess wird durch A induziert?

7.7 (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\frac{d}{dt} p_{kj}(t) \geq \sum_{i \in E} p_{ki}(t) a_{ij}$ ausfällt. Unter welcher Zusatzannahme besteht Gleichheit?

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Freitag, dem 30.01.2009, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.