Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel WS 2008/09

Markov'sche Prozesse

8. Übungsserie

8.1 Wir betrachten eine Population, in der die Individuen in jedem Zeitintervall $[t, t+h)$ unabhängig voneinander und unabhängig von der Populationsgröße X_t zum Zeitpunkt t, jeweils mit der Wahrscheinlichkeit

$$\beta h + o(h), \quad \beta > 0, \quad (h \downarrow 0)$$

einen Nachkommen produzieren. Bestimmen Sie für $X_0 = 1$ die Wahrscheinlichkeiten

$$P_n(t) := P[X_t = n], \quad n = 0, 1, \dots.$$

8.2 (4 Punkte) Ein Call-Center verfügt über m Telefonleitungen. Das Eintreffen der Anrufe wird durch einen Poisson-Prozess mit dem Parameter $\lambda > 0$ modelliert. Sofern Leitungen frei sind, wird ein Anruf angenommen und bearbeitet. Anderenfalls wird der Anrufer abgewiesen. Jeder angenommene Anruf besitzt eine exponentialverteilte Bearbeitungszeit mit dem Parameter $\mu > 0$, und die Bearbeitungszeiten verschiedener Anrufe sind unabhängig voneinander und auch vom Poisson-Prozess. Wir bezeichnen mit X_t die Anzahl der besetzten Leitungen zum Zeitpunkt t und setzen $X_0 = 0$ voraus. Bestimmen Sie die stationäre Verteilung für $(X_t, t \geq 0)$.

8.3 (4 Punkte) Es sei $(X_t, t \geq 0)$ ein reiner Geburtsprozess mit Start in 0. Hierbei wird für $h \downarrow 0$ angenommen, dass gilt:

$$P[\text{Ein Sprung erfolgt in } [t, t+h) | X_t \text{ ist ungerade}] = \lambda_1 h + o(h),$$
$$P[\text{Ein Sprung erfolgt in } [t, t+h) | X_t \text{ ist gerade}] = \lambda_2 h + o(h).$$

Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P_1(t) := P[X_t \text{ ist ungerade}], \quad P_2(t) := P[X_t \text{ ist gerade}].$$

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Freitag, dem 13.02.2009, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die Aufgabe 8.1 wird in der Übung besprochen.