Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel WS 2008/09

Risikotheorie

1. Übungsserie

1.1 Es seien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ unabhängige Zufallsgrößen mit dem Erwartungswert $ET_k = t, k = 1, \ldots, n$. Die Varianzen $\sigma_k^2 = E(T_k - t)^2$ seien endlich und bekannt. Man bestimme diejenige Schätzung der Form

$$T = \sum_{k=1}^{n} w_k T_k,$$

die die minimale Varianz besitzt. Dabei sollen die Gewichte w_k nichtnegative Zahlen mit $\sum_{k=1}^{n} w_k = 1$ sein. Wann ergibt sich $w_k \equiv \frac{1}{n}$?

1.2 Es seien $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge nichtnegativer, unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen sowie N eine von $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Zufallsgröße mit Werten in $\{0, 1, 2, \ldots\}$ und der Verteilung $(p_k)_{k=0,1,\ldots}$.

a) Man bestimme die Laplace-Transformierte L_Z der Zufallsgröße

$$Z = \sum_{k=1}^{N} X_k$$

mithilfe der Laplace-Transformierten L_{X_1} von X_1 und der erzeugenden Funktion φ_N von N.

b) Es seien die Momente EX_1^2 und EN^2 als endlich vorausgesetzt. Man bestimme den Erwartungswert und die Streuung von Z.

c) Was ergibt sich in a) und b), falls N eine Poissonverteilung besitzt?

1.3 (4 Punkte) Es sei X eine nichtnegative Zufallsgröße und L ihre Laplace-Transformierte, d. h.

$$L(u) := E\mathrm{e}^{-uX} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ux} F(dx), \quad u \geqslant 0.$$

Die Funktion ψ definiert durch

$$\psi(u) := \ln L(u), \quad u > 0,$$

nennt man *kumulantenerzeugende Funktion* von X bzw. von F. Für $u > 0$ ist ψ an der Stelle u unendlich oft differenzierbar (Beweis?). Falls $EX^k < \infty$, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{u \downarrow 0} (-1)^l \frac{d^l \psi}{du^l}(u) =: \kappa_l, \quad 1 \leqslant l \leqslant k$$

und sind endlich. Die Zahl κ_l heißt die l-te Kumulante (= l-te Semiinvariante) von X bzw. F. Zeigen Sie:

a) Es gilt $\kappa_1 = EX$, $\kappa_2 = \mathrm{Var}(X)$.

b) Beim Übergang von X zu $X+b$ (b konstant) bleiben alle κ_l, $l > 1$, unverändert.

c) Sind X und Y unabhängige Zufallsgrößen mit

$$E|X|^k < \infty,\ E|Y|^k < \infty,$$

so gilt

$$\kappa_l^{(X+Y)} = \kappa_l^{(X)} + \kappa_l^{(Y)},\ 1 \leqslant l \leqslant k.$$

1.4 (7 Punkte) Es sei X eine Gammaverteilte Zufallsgröße mit den Parametern $\lambda, \alpha > 0$, d. h. mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Symbolisch: $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$.

a) Man berechne die Laplace-Transformierte der $\Gamma(\alpha, \lambda)$-Verteilung.

b) Man zeige, dass für $\lambda, \alpha, \beta > 0$ gilt:

$$\Gamma(\alpha, \lambda) * \Gamma(\beta, \lambda) = \Gamma(\alpha + \beta, \lambda)$$

c) Man zeige $cX \sim \Gamma(\alpha, \frac{\lambda}{c})$, $c > 0$, und bestimme EX^k, $k \geqslant 1$, sowie $\mathrm{Var}(X)$.

d) Verschaffen Sie sich einen Überblick über die Form der Dichten in Abhängigkeit von λ und α, und bestimmen Sie den Modalwert der $\Gamma(\alpha, \lambda)$-Verteilung.

e) Man überlege sich, gegen welche Verteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$ konvergiert,

1) wenn λ und α gegen Unendlich konvergieren, wobei $\frac{\alpha}{\lambda} > 0$ konstant ist,
2) wenn $\alpha \to \infty$ bei festem λ (bei geeigneter Normierung).

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Mittwoch, dem 29.10.2008, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.