Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Risikotheorie

2. Übungsserie

<u>2.1</u> Es sei X eine Zufallsgröße mit $EX^2 < \infty$. Man beweise die Ungleichung von Cantelli:

$$P(X \geq EX + c) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{c^2 + \mathrm{Var}(X)} \quad \text{für alle } c \geq 0.$$

<u>2.2</u> Es sei Y eine $\Gamma(\alpha, \lambda)$-verteilte Zufallsgröße. Unter der Bedingung $Y = \mu$ habe die Zufallsgröße X eine Poisson-Verteilung mit Parameter μ:

$$P(X = k | Y = \mu) = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Zeigen Sie, dass X negativ-binomialverteilt ist und bestimmen Sie die Parameter der Negativen Binomialverteilung in Abhängigkeit von α und λ.

<u>2.3</u> Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei X_n eine $\mathrm{IG}(\mu_n, \mu_n^{-1})$-verteilte Zufallsgröße, wobei $\mu_n \uparrow \infty$ gelte. Man zeige, dass $(X_n - \mu_n)$ für $n \to \infty$ schwach gegen $X \sim N(0,1)$ konvergiert.

<u>2.4</u> (4 Punkte) Es sei Y_k, $k \in \mathbb{N}_0$, eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsgrößen mit $P(Y_1 = 0) = 0$. Weiterhin bezeichne N eine zum Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Zufallsgröße, die unabhängig von Y_k, $k \in \mathbb{N}_0$, ist. Welche Verteilung besitzt Y_1, wenn die Zufallsgröße

$$Z := \begin{cases} \Sigma_{k=1}^{N} Y_k & \text{für } N \geq 1, \\ 0 & \text{für } N = 0, \end{cases}$$

negativ-binomialverteilt mit den Parametern $\nu > 0$ und $p \in (0,1)$ ist ?

<u>2.5</u> (6 Punkte) Man beweise die folgenden Aussagen:

(i) Es sei $P = (p_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ eine Poisson-, Negative Binomial- oder Binomialverteilung. Dann gibt es Zahlen a und b mit $a + b > 0$, so dass

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right) p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots . \qquad (*)$$

(ii) Es sei $P = (p_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ eine Verteilung auf $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Gilt $p_0 < 1$ und erfüllt $(p_k)_{k=0,1,2,\ldots}$ die Rekursionsformel $(*)$ mit Zahlen a und b, so ist umgekehrt P eine der Verteilungen aus (i).

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Mittwoch, dem 12.11.2008, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.