Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Risikotheorie

3. Übungsserie

3.1 Man zeige: Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $\mathbb{R}_+$ ist genau dann unendlich teilbar wenn ihre Laplace-Transformierte L_μ eine Darstellung der Form

$$L_\mu(u) = \exp(-cu - \int_0^\infty (1 - e^{-ux})\,\nu(dx)), \quad u > 0,$$

besitzt. Hierbei ist $c \geq 0$ eine Konstante, und ν bezeichnet ein Maß auf $\mathbb{R}_+$, das der Integrierbarkeitsbedingung

$$\int_0^\infty (x \wedge 1)\,\nu(dx) < \infty$$

genügt. Welche Darstellung ergibt sich für die Gamma-Verteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$?

3.2 Es sei $(N_t, t \geq 0)$ ein Poisson-Prozess mit dem Parameter $\lambda > 0$. Die Sprungzeiten werden mit $S_n, n \geq 1$, bezeichnet. Es gilt also

$$N_t = \sum_{k=1}^\infty 1_{\{S_k \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

a) Man bestimme die bedingte Verteilung von S_1 unter der Bedingung $\{N_t = 1\}$ und die bedingte Verteilung von (S_1, S_2) unter der Bedingung $\{N_t = 2\}$.

b) Ist $N_t^{(1)} = \sum_{k=1}^\infty 1_{\{S_{2k} \leq t\}}$, $t \geq 0$, ebenfalls ein Poisson-Prozess ?

c) Ist zusätzlich $(X_k, k \geq 1)$ ein (unendliches) von $(N_t, t \geq 0)$ unabhängiges Bernoullischema mit dem Parameter $p \in (0, 1)$, so bildet

$$N_t^{(2)} = \sum_{k=1}^\infty 1_{\{S_k \leq t, X_k = 1\}}, \quad t \geq 0,$$

einen Poisson-Prozess. Beweisen Sie diese Aussage und berechnen Sie den zugehörigen Parameter. Welcher Unterschied besteht zwischen $N^{(1)}$ und $N^{(2)}$?

3.3 (6 Punkte) Wir betrachten das kollektive Modell, in dem der Gesamtschaden

$$S = (\Sigma_{k=1}^N X_k)\, 1_{\{N \geq 1\}}$$

durch unabhängige identisch verteilte Einzelschäden $(X_k, k \geq 1)$ und eine davon unabhängige Schadenzahl $N \sim (p_k, k \geq 0)$ erzeugt wird. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass die Schadenzahlverteilung (p_k) dem Panjer-Schema

$$p_k = (a + \tfrac{b}{k})p_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

für gewisse Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ genügt (siehe Aufgabe 2.5).

a) Zeigen Sie, dass

$$E(N^k) = aE((N+1)^k) + bE((N+1)^{k-1}) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

b) Bestimmen Sie aus a) den Erwartungswert, die Varianz und den Variationskoeffizienten von N in Abhängigkeit der Parameter a und b.

c) Zeigen Sie, dass die Laplace-Transformierten L_S, L_{X_1} von S und X_1 die Differentialgleichung

$$\tfrac{d}{du}L_S(u) = aL_{X_1}(u)(\tfrac{d}{du}L_S(u)) + (a+b)(\tfrac{d}{du}L_{X_1}(u))L_S(u), \quad u > 0,$$

erfüllen.

Hinweis: Man verwende Aufgabe 1.2 a).

d) Sind die Einzelschäden auf $\mathbb{N}$ konzentriert, so gilt

$$P(S=k) = \sum_{l=1}^{k}(a + b\tfrac{l}{k})P(X_1 = l)P(S = k-l) \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Man beachte, dass

$$E(X_1|\Sigma_{k=1}^n X_k = j) = \tfrac{j}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, j \geq n.$$

3.4 (3 Punkte) Eine Zufallsgröße X heißt Pareto-verteilt mit den Parametern α und λ ($\alpha, \lambda > 0$), falls sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

besitzt.

a) Für welche $k \geq 1$ ist das k-te Moment EX^k endlich?

b) Man zeige: Ist Z eine mit dem Parameter $\mu > 0$ exponentialverteilte Zufallsgröße, und nimmt man an, dass μ selbst eine Zufallsgröße ist, die eine Gammaverteilung mit den Parametern α und λ ($\alpha, \lambda > 0$) besitzt, so ist Z Pareto-verteilt mit den Parametern α und λ.

c) Mit X ist auch aX Pareto-verteilt, falls $a > 0$ gilt.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Mittwoch, dem 26.11.2008, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.