Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Risikotheorie
4. Übungsserie

4.1 Aus einer Wahrscheinlichkeitsverteilung $p = (p_k, k \geq 0)$ mit $p_0 < 1$ gewinnt man die sogenannte bei Null gestutzte Verteilung $p^* = (p_k^*, k \geq 1)$ durch

$$p_k^* = \tfrac{1}{1-p_0}\, p_k, \quad k \geq 1.$$

a) Drücken Sie die erzeugende Funktion von p^* durch die von p aus.

b) Zeigen Sie, dass man für den Parameter v der bei Null gestutzten negativen Binomialverteilung $\mathrm{NB}^*(v, p)$ auch den Bereich $(-1, 0)$ zulassen kann. Man erhält dann die sogenannte erweiterte gestutzte negative Binomialverteilung. Berechnen Sie ihre erzeugende Funktion.

4.2 Die Darstellung der erzeugenden Funktion einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung ist genau dann eindeutig, wenn die zweite Verteilung bei Null gestutzt ist.

4.3 Beweisen Sie, dass die Faltung zweier gemischter Poisson-Verteilungen mit den Mischungsmaßen U bzw. V eine gemischte Poisson-Verteilung ist, und bestimmen Sie deren Mischungsmaß.

4.4 (5 Punkte) Es sei F_α die Verteilungsfunktion der Mischung von Exponentialverteilungen $\mathrm{Exp}(\vartheta^{-1})$, $\vartheta > 0$, bezüglich der Pareto-Verteilung $\mathrm{Par}(\alpha, (\alpha-1)/\alpha)$, $\alpha > 1$. Hierbei ist $\mathrm{Par}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$, die Wahrscheinlichkeitsverteilung mit der Dichte

$$g_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha+1} & \text{für } x > \beta, \\ 0 & \text{für } x \leq \beta, \end{cases}$$

(vgl. Übung). Man zeige:

a) Die *Pareto-Mischung der Exponentialverteilung* besitzt die Dichte

$$f_\alpha(x) = \int_{(\alpha-1)/\alpha}^{\infty} (\vartheta)^{-1} \exp(-(\vartheta)^{-1} x) \alpha (\tfrac{\alpha-1}{\alpha})^\alpha (\vartheta)^{-(\alpha+1)}\, d\vartheta\, 1_{(0,\infty)}(x).$$

b) Für $k < \alpha$ existiert das k-te Moment $m_{k,\alpha}$ von F_α und ist gegeben durch

$$m_{k,\alpha} = \tfrac{k!}{\alpha-k} \alpha (\tfrac{\alpha-1}{\alpha})^k.$$

c) Die Laplace-Transformierte L_α besitzt die Form

$$L_\alpha(u) = \alpha(\tfrac{\alpha-1}{\alpha})^\alpha \int_0^{\alpha/(\alpha-1)} \tfrac{x^\alpha}{u+x}\, dx, \quad u \geq 0.$$

d) Für jedes $x > 0$ hat die sogenannte Überlebensfunktion $\overline{F}_\alpha(x) := 1 - F_\alpha(x)$ die Form

$$\overline{F}_\alpha(x) = \alpha(\tfrac{\alpha-1}{\alpha})^\alpha x^{-\alpha} \int_0^{\alpha x/(\alpha-1)} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy,$$

d. h. F_α ist eine Verteilungsfunktion vom Pareto-Typ (vgl. Übung). Insbesondere folgt

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha \overline{F}_\alpha(x) = \Gamma(\alpha+1)(\tfrac{\alpha-1}{\alpha})^\alpha.$$

4.5 (5 Punkte) Es sei L_F die Laplace-Transformierte einer zusammengesetzten Verteilung F auf $\mathbb{R}_+$, d. h. es gelte

$$L_F(u) = \varphi_{\mathbf{p}}(L_G(u)), \quad u > 0.$$

Hierbei ist $\varphi_{\mathbf{p}}$ die erzeugende Funktion einer Verteilung $\mathbf{p} = (p_k)$ auf $\mathbb{N}_0$, und L_G bezeichnet die Laplace-Transformierte einer Verteilung G auf $\mathbb{R}_+$.

a) Bestimmen Sie die Kumulanten $\kappa_1^F, \ldots, \kappa_4^F$ von F auf der Basis von $\kappa_i^{\mathbf{p}}, \kappa_i^G$, $i = 1, 2, 3, 4$.

b) Berechnen Sie die Schiefe und die Wölbung von F für den Spezialfall $\mathbf{p} = \mathrm{Poiss}(\lambda)$, $\lambda > 0$, und $G = \Gamma(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Mittwoch, dem 10.12.2008, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.