Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Risikotheorie

6. Übungsserie

6.1 Es seien X, Y zwei reellwertige Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit Überlebensfunktionen $\overline{F}_X$ und $\overline{F}_Y$. Für die zugehörigen Verteilungen P_X, P_Y definieren wir

$$P_X \leq^0 P_Y \quad :\Leftrightarrow \quad \overline{F}_X(z) \leq \overline{F}_Y(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}$$

und sagen in diesem Fall, dass P_Y die Verteilung P_X *stochastisch dominiert*. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Durch $\leq^0$ ist eine Ordnungsrelation auf der Menge der Verteilungen aller reellwertigen Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ gegeben.

b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gilt $P_X \leq^0 P_Y$.

(ii) Es gibt zwei reellwertige Zufallsgrößen X', Y' auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ mit $X' \leq Y'$, $X' \overset{d}{=} X$ und $Y' \overset{d}{=} Y$.

(iii) Für alle wachsenden Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $E[g(X)] \leq E[g(Y)]$, falls diese Erwartungen existieren und endlich sind.

c) Sind X, Y nichtnegative Zufallsgrößen mit $P_X \leq^0 P_Y$ und $E[X] = E[Y]$, so folgt $P_X = P_Y$.

d) Die Relation $\leq^0$ ist keine totale Ordnung ist, d. h. es gibt Verteilungen P_X, P_Y für die weder $P_X \leq^0 P_Y$ noch $P_Y \leq^0 P_X$ gilt.

6.2 Wann liegt für zwei eindimensionale Normalverteilungen die stochastische Dominanz $\leq^0$ vor?

6.3 Für eine nichtnegative Zufallsgröße X mit $E[X] < \infty$ wird die Abbildung

$$S_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad S_X(a) := E[(X-a)^+]$$

integrierte Überlebensfunktion von X genannt. Auf der Menge der Verteilungen P_X aller nichtnegativen Zufallsgrößen X mit endlicher Erwartung definieren wir die sogenannte *stop-loss*-Ordnung $\leq^1$ durch

$$P_X \leq^1 P_Y \quad :\Leftrightarrow \quad S_X(a) \leq S_Y(a) \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie:

a) Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $S_X(a) = \int_a^\infty P[X > x]\, dx = \int_a^\infty \overline{F}_X(x)\, dx$.

b) Die Verteilung von X ist durch S_X bestimmt.

c) Durch $\leq^1$ ist eine Ordnungsrelation auf der Menge der Verteilungen aller nichtnegativen Zufallsgrößen mit endlicher Erwartung gegeben.

d) Sind X, Y nichtnegative Zufallsgrößen mit endlicher Erwartung und $P_X \leq^0 P_Y$, so folgt $P_X \leq^1 P_Y$.

e) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

   i) Es gilt $P_X \leq^1 P_Y$.

   ii) Für alle wachsenden konvexen Funktionen $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gilt $E[g(X)] \leq E[g(Y)]$, sofern diese Erwartungen existieren und endlich sind.

f) Für nichtnegative Zufallsgrößen X, Y mit $P_X \leq^1 P_Y$ sowie $E[X] = E[Y] < \infty$ und $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) < \infty$ folgt $P_X = P_Y$.

6.4 (2 Punkte) Für eine streng monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ heißt die Abbildung

$$H(X) := \tfrac{E[Xg(X)]}{E[g(X)]}$$

Esscher-Prinzip bezüglich g. Zeigen Sie, dass das Esscher-Prinzip ein Prämienprinzip ist, d. h. es gilt $H(X) - E[X] > 0$ für jedes Risiko X mit endlichen Erwartungswerten $E[Xg(X)], E[g(X)]$ und $\mathrm{Var}(X) > 0$.

6.5 (3 Punkte) Eine streng monoton wachsende und streng konkave Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *Nutzenfunktion*. Durch das sogenannte *Nullnutzenprinzip* wird die Prämie $H(X)$ für die Übernahme eines Risikos X implizit durch die Vorschrift

$$E[u(H(X) - X)] = u(0) \qquad (*)$$

festgelegt. Zeigen Sie:

a) Ist u eine Nutzenfunktion, so erzeugt $\widetilde{u} := bu + c$, $b > 0$, $c \in \mathbb{R}$, das gleiche Nullnutzenprinzip.

b) Aus dem Nullnutzenprinzip erhält man für jedes Risiko X mit $\mathrm{Var}(X) > 0$ eine Prämie $H(X)$ mit $H(X) - E[X] > 0$.

c) Das Nullnutzenprinzip ist isoton bezüglich der Ordnung $\leq^1$, d. h. für zwei Risiken X, Y mit $P_X \leq^1 P_Y$ gilt $H(X) \leq H(Y)$.

6.6 (5 Punkte) Zeigen Sie:

a) Für die exponentielle Nutzenfunktion $u_a(x) = \frac{1}{a}(1 - \exp(-ax))$ mit Parameter $\alpha > 0$ liefert $(*)$ das Prämienprinzip

$$H_a(X) = \tfrac{1}{a} \ln E[\exp(aX)].$$

b) Ist X ein Risiko mit $E[\exp(aX)] < \infty$ für alle $a > 0$, so besitzt die Funktion $a \mapsto H_a(X)$ folgende Eigenschaften:

   i) Die Funktion $a \mapsto H_a(X)$ ist streng monoton wachsend auf $(0, \infty)$.

   ii) Es gilt $\lim_{a\downarrow 0} H_a(X) = E[X]$ sowie $\lim_{a\uparrow\infty} H_a(X) = \min\{x > 0 | F_X(x) = 1\}$ mit $\min \emptyset := \infty$.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Mittwoch, dem 21.01.2009, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.