Prof. Dr. Uwe Küchler
Dipl.-Math. Thomas Knispel

WS 2008/09

Risikotheorie

7. Übungsserie

<u>7.1</u> Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Nutzenfunktion, und

$$\alpha(x) := -u''(x)/u'(x)$$

bezeichne den zugehörigen Arrow-Pratt-Koeffizienten der absoluten Risikoaversion an der Stelle x. Für eine Wahrscheinlichkeitsverteilung μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ heißt die Zahl $c(\mu)$ mit der Eigenschaft

$$u(c(\mu)) = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mu(dx)$$

Sicherheitsäquivalent von μ.

a) Der Erwartungwert $m(\mu)$ und die Varianz $\operatorname{var}(\mu)$ von μ seien endlich. Zeigen Sie, dass für das Sicherheitsäquivalent die Approximation

$$c(\mu) \approx m(\mu) - \tfrac{1}{2}\alpha(m(\mu))\operatorname{var}(\mu)$$

besteht.

b) Zeigen Sie, dass $m(\mu) \geq c(\mu) \geq \int_{\mathbb{R}} xu'(x)\,\mu(dx) / \int_{\mathbb{R}} u'(x)\,\mu(dx)$ gilt.

c) Es sei $\widetilde{u}$ eine weitere Nutzenfunktion, die zweimal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

i) Für die Arrow-Pratt-Koeffizienten α, $\widetilde{\alpha}$ gilt $\alpha(x) \geq \widetilde{\alpha}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

ii) Es existiert eine streng wachsende konkave Funktion f mit $u = f \circ \widetilde{u}$.

iii) Die mit u und $\widetilde{u}$ verbundenen Sicherheitsäquivalente erfüllen $c(\mu) \leq \widetilde{c}(\mu)$ für alle Wahrscheinlichkeitsverteilungen μ auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$.

In den folgenden Aufgaben bezeichnet $\leq^1$ die in Aufgabe <u>6.3</u> eingeführte *stop-loss*-Ordnung.

<u>7.2</u> Es seien $X, Y, Z \in L^1(P)$ nichtnegative Zufallsgrößen derart, dass sowohl X und Z als auch Y und Z unabhängig sind. Zeigen Sie, dass in diesem Fall aus $P_X \leq^1 P_Y$ auch $P_{X+Z} \leq^1 P_{Y+Z}$ folgt.

<u>7.3</u> Es seien $(X_i)_{i=1,\ldots,m}$ und $(Y_i)_{i=1,\ldots,n}$ zwei voneinander unabhängige *individuelle Modelle*, deren Einzelrisiken identisch verteilt sind. Es gelte $X_1, Y_1 \in L^1(P)$, $m \leq n$ und $P_{X_1} \leq^1 P_{Y_1}$. Zeigen Sie, dass für die zugehörigen Gesamtschäden

$$S := \Sigma_{i=1}^m X_i \quad \text{und} \quad T := \Sigma_{i=1}^n Y_i$$

die Relation $P_S \leq^1 P_T$ gilt.

7.4 (4 Punkte) Es seien $(M, (X_i)_{i\in\mathbb{N}})$ und $(N, (Y_i)_{i\in\mathbb{N}})$ *kollektive Modelle*, die voneinander unabhängig sind. Hierbei bezeichnen die Zufallsgrößen M, N die Schadenzahlverteilungen, und $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}, (Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entsprechen den Schadenhöhenverteilungen. Wir setzen voraus, dass die Bedingungen $M, N, X_1, Y_1 \in L^1(P)$, $P_M \leq^1 P_N$ sowie $P_{X_1} \leq^1 P_{Y_1}$ erfüllt sind. Beweisen Sie ohne Verwendung von Aufgabe 7.5, dass für die zugehörigen Gesamtschäden

$$S := (\Sigma_{i=1}^M X_i) 1_{\{M\geq 1\}} \quad \text{und} \quad T := (\Sigma_{i=1}^N Y_i) 1_{\{N\geq 1\}}$$

in diesem Fall $P_S \leq^1 P_T$ gilt.

7.5 (4 Punkte) Beweisen Sie die Aussagen der Aufgaben 7.2-7.4 für die Ordnungsrelation $\leq^0$ (siehe Aufgabe 6.2).

7.6 (1 Punkt) Bestimmen Sie für die quadratische Nutzenfunktion mit Sättigung bei $b > 0$

$$u(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2b} & \text{für } x < b, \\ \frac{b}{2} & \text{für } x \geq b, \end{cases}$$

die Prämie $H(X)$ bezüglich des Nullnutzenprinzips näherungsweise.

7.7 (3 Punkte) Es sei $(M_1, \ldots, M_n)$ ein zufälliger Vektor mit unabhängigen Poisson-verteilten Komponenten, wobei $M_i \sim \text{Poiss}(r\lambda_i)$, $r > 0, \lambda_i > 0, i = 1, \ldots, n$, $\Sigma_{i=1}^n \lambda_i = 1$, angenommen wird. Geben Sie auf der Grundlage der Stichprobe $(M_1, \ldots, M_n)$ die Maximum-Likelihood-Schätzung für r und λ_i, $i = 1, \ldots, n$, an.

Die mit Punkten versehenen Aufgaben sind schriftlich auszuarbeiten und am Mittwoch, dem 4.02.2009, zu Beginn der Vorlesung abzugeben. Die übrigen Aufgaben werden in der Übung besprochen.