

Risikotheorie

8. Übungsserie

In den folgenden Aufgaben wird das in der Vorlesung eingeführte heterogene Modell der Vertrauenstarifizierung zugrunde gelegt. Wir betrachten nur den i -ten Vertrag und unterdrücken zur Vereinfachung der Notation den Index i .

8.1 Gegeben $\theta > 0$ seien die Schadenhöhen X_1, \dots, X_n des Vertrages unabhängig und Pareto-verteilt zu den Parametern (λ, θ) , d. h. es gilt

$$P[X_i > x|\theta] = (\lambda/x)^\theta, \quad x > \lambda.$$

Weiterhin wird angenommen, dass θ Gamma-verteilt ist mit der Dichte

$$f_{\gamma, \beta}(\vartheta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \vartheta^{\gamma-1} e^{-\beta\vartheta} \mathbf{1}_{(0, \infty)}(\vartheta), \quad \gamma, \beta > 0.$$

a) Zeigen Sie, dass $\theta|X$ mit $X = (X_1, \dots, X_n)^\top$ die Dichte

$$f_{\gamma+n, \beta + \sum_{i=1}^n \ln(X_i/\lambda)}$$

besitzt.

b) Beweisen Sie, dass der Schätzer $\hat{\nu}_B$ von $\nu(\theta) := P[X_1 > K|\theta], K > \lambda$, auf der Basis der Daten X_1, \dots, X_n , der $E[(\nu(\theta) - Y)^2]$ über alle $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ -messbaren Y minimiert, die folgende Form hat:

$$\frac{(\beta + \sum_{i=1}^n \ln(X_i/\lambda))^{\gamma+n}}{(\beta + \ln(K/\lambda) + \sum_{i=1}^n \ln(X_i/\lambda))^{\gamma+n}}.$$

8.2 Wir nehmen an, dass der Heterogenitätsparameter θ eine Beta-Verteilung mit der Dichte

$$f_\theta(\vartheta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \vartheta^{a-1} (1-\vartheta)^{b-1} \mathbf{1}_{(0,1)}(\vartheta), \quad a, b > 0.$$

besitzt. Gegeben θ seien die Schadenzahlen X_1, \dots, X_n des Vertrages unabhängig und $\text{Bin}(k, \theta)$ -verteilt.

a) Bestimmen Sie die bedingte Dichte $f_\theta(\vartheta|X = x)$ von θ unter der Bedingung $X = (X_1, \dots, X_n)^\top = x = (x_1, \dots, x_n)^\top$.

b) Berechnen Sie den Schätzer $\hat{\mu}_B$ von $\mu(\theta) = E[X_1|\theta]$ auf der Basis der Daten X_1, \dots, X_n und das zugehörige Risiko $\rho(\hat{\mu}_B) = E[(\mu(\theta) - \hat{\mu}_B)^2]$.

Hinweis: Es gilt $E[\theta] = \frac{a}{a+b}$ sowie $\text{var}(\theta) = \frac{ab}{[(a+b+1)(a+b)^2]}$.

Diese Aufgaben werden in der Übung am 11.02.2009 besprochen.