HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 15

Schriftliche Abgabe: Dienstag 11. Februar 2020
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Aufgabe 15.1 (2 + 3 + 2 + 2 + 4 + 5 Punkte)
Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als 3-dimensionale Mannigfaltigkeit, auf der die kartesischen Koordinaten glatte Funktionen $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definieren. Sei $\omega \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ die glatte 3-Form gegeben durch

$$\omega := dx \wedge dy \wedge dz.$$

Da $T_{\mathbf{x}}\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^3$ für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ist $\omega_{\mathbf{x}}$ eine antisymmetrische multilineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, d.h. $\omega_{\mathbf{x}}$ gehört zum Vektorraum $\Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$. Zeigen Sie:

a) $\omega = dy \wedge dz \wedge dx = dz \wedge dx \wedge dy$.

b) Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}\end{pmatrix}$, wobei die Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ als Spalten einer 3-mal-3 Matrix betrachtet werden.
Hinweis: $\dim \Lambda^3(\mathbb{R}^3)^* = 1$.

c) Für eine gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt $\omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{Au}, \mathbf{Av}, \mathbf{Aw}) = \omega_{\mathbf{x}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ für alle Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $\operatorname{Det}(\mathbf{A}) = 1$. Insbesondere gilt das für alle 3-dimensionalen Rotationen $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(3)$.

Jetzt betrachten wir das Kreuzprodukt auf $\mathbb{R}^3$. Sei $\langle\ ,\ \rangle$ das euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$; dies bestimmt einen Isomorphismus[1]

$$\flat : \mathbb{R}^3 \to \Lambda^1(\mathbb{R}^3)^*, \qquad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}^\flat := \langle \mathbf{v}, \cdot \rangle, \text{ d.h. } \mathbf{v}^\flat(\mathbf{w}) := \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle.$$

Sei $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$, und $\mu := \mathbf{e}_1^\flat \wedge \mathbf{e}_2^\flat \wedge \mathbf{e}_3^\flat \in \Lambda^3(\mathbb{R}^3)^*$. Zeigen Sie:

d) Die Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ definiert durch $\mathbf{v} \mapsto \iota_{\mathbf{v}}\mu := \mu(\mathbf{v}, \cdot, \cdot) \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)^*$ ist auch ein linearer Isomorphismus.

e) Das Kreuzprodukt $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ von Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ wird eindeutig durch die Relation $\mathbf{v}^\flat \wedge \mathbf{w}^\flat = \iota_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mu$ bestimmt.
Hinweis: Einfach in Koordinaten berechnen.

f) Für alle Rotationen $\mathbf{A} \in \mathrm{SO}(3)$ und $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\mathbf{Av} \times \mathbf{Aw} = \mathbf{A}(\mathbf{v} \times \mathbf{w})$.

Bemerkung: In Verbindung mit Aufgabe 13.B folgt aus dieser Aufgabe die allgemeine Relation $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| \sin\theta$, *wobei* $\theta \in [0, \pi]$ *der Winkel zwischen* $\mathbf{v}$ *und* $\mathbf{w}$ *ist.*

Aufgabe 15.2 (3 + 2 + 3 Punkte)
Wir betrachten wieder $\mathbb{R}^3$ als glatte 3-Mannigfaltigkeit mit den kartesischen Koordinaten $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Sei $N := \{x \geqslant 0 \text{ und } y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$. Auf der offenen Teilmenge $\mathbb{R}^3\backslash N$ sind auch die Kugelkoordinaten (s. Aufgabe 11.1)

$$r : \mathbb{R}^3\backslash N \to (0, \infty), \quad \theta : \mathbb{R}^3\backslash N \to (0, 2\pi), \quad \phi : \mathbb{R}^3\backslash N \to (-\pi/2, \pi/2)$$

[1]Die Abbildung $\flat : V \to V^*$ und seine Umkehrabbildung $\sharp : V^* \to V$ können analog für jeden endlich-dimensionalen reellen Vektorraum V mit einem Skalarprodukt definiert werden, und heißen die *musikalischen Isomorphismen.* Wie $v^\flat$ und $\lambda^\sharp$ auf Deutsch auszusprechen sind, habe ich leider keine Ahnung; im Englischen sagt man "v-flat" und "λ-sharp".

als glatte Funktionen definiert, und diese sind eindeutig durch die Relationen

$$x = r\cos\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\cos\phi, \qquad z = r\sin\phi$$

bestimmt.

a) Finden Sie die eindeutigen glatten Funktionen $f_{ij} : \mathbb{R}^3\backslash N \to \mathbb{R}$ für $i, j = 1, 2, 3$, so dass

$$\begin{aligned} dx &= f_{11}\,dr + f_{12}\,d\theta + f_{13}\,d\phi, \\ dy &= f_{21}\,dr + f_{22}\,d\theta + f_{23}\,d\phi, \\ dz &= f_{31}\,dr + f_{32}\,d\theta + f_{33}\,d\phi \end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^3\backslash N$ gilt. Versuchen Sie, möglichst einfache Formeln für diese Funktionen zu finden.
Hinweis: Sie dürfen die Produktregel $d(fg) = g\,df + f\,dg$ nicht vergessen.

b) Finden Sie (wieder mit möglichst einfachen Formeln) die eindeutigen glatten Funktionen $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^3\backslash N \to \mathbb{R}$, so dass $d\theta = g_1\,dx + g_2\,dy + g_3\,dz$ auf $\mathbb{R}^3\backslash N$ gilt.

c) Beweisen Sie die Relation $dx \wedge dy \wedge dz = r^2\cos\phi\,dr \wedge d\theta \wedge d\phi$ auf $\mathbb{R}^3\backslash N$.

Aufgabe 15.3 (2 + 2 Punkte)
Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\mathbf{X} = (X_x, X_y, X_z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ betrachten wir Differentialformen $\lambda \in \Omega^1_1(\mathbb{R}^3)$ und $\omega \in \Omega^2_1(\mathbb{R}^3)$ definiert in kartesischen Koordinaten $x, y, z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $\lambda := X_x\,dx + X_y\,dy + X_z\,dz$ und $\omega := X_x\,dy \wedge dz + X_y\,dz \wedge dx + X_z\,dx \wedge dy$.

a) Unter welchen Bedingungen für $\mathbf{X}$ ist die 1-Form λ geschlossen?

b) Unter welchen Bedingungen für $\mathbf{X}$ ist die 2-Form ω geschlossen?

Insgesamt: **30 Punkte**

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen, sind aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 15.A
Genau wie Aufgabe 15.2, aber mit zylindrischen Polarkoordinaten auf $\mathbb{R}^3\backslash N$ statt Kugelkoordinaten.

Aufgabe 15.B
Wir betrachten die 2-Mannigfaltigkeit $M := \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ mit kartesischen Koordinaten $x, y : M \to \mathbb{R}$ und der glatten 1-Form $\lambda := -\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy \in \Omega^1(M)$.

a) Beweisen Sie direkt aus der Definition: $d\lambda = 0$.

b) Schreiben Sie λ auf einer passenden offenen Teilmenge $\mathcal{U} \subset M$ als $f\,dr + g\,d\theta$ für Funktionen $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, wobei $r, \theta : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ Polarkoordinaten sind, d.h. sie sind mit x und y durch $x = r\cos\theta$ und $y = r\sin\theta$ verwandt.

c) Erklären Sie, wie man für einen beliebigen Punkt $p \in M$ eine Umgebung $\mathcal{O} \subset M$ von p und eine explizite Funktion $h : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ mit $dh = \lambda$ finden kann.

d) Auf der glatten 1-dimensionalen Untermannigfaltigkeit $S^1 \subset M \subset \mathbb{R}^2$ definiert λ durch Einschränkung auch eine glatte 1-Form $\lambda \in \Omega^1(S^1)$. Berechnen Sie: nach Wahl einer passenden Orientierung auf S^1 gilt $\displaystyle\int_{S^1} \lambda = 2\pi$.

e) Zeigen Sie, dass $\lambda \in \Omega^1(M)$ nicht exakt ist.