HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN
Institut für Mathematik
C. Wendl, A. Fauck,
L. Kotan, L. Upmeier zu Belzen

Analysis III

WiSe 2019–20

Übungsblatt 6

Schriftliche Abgabe: Dienstag 26. November 2019
Schreiben Sie jede Aufgabe bitte auf ein gesondertes Blatt, und schreiben Sie auf jedes Blatt ihren Namen, ihre Matrikelnummer und ihre Übungsgruppe (Wochentag + Zeit)

Hinweis zur Notation: für einen metrischen Raum X bezeichnen wir die Borelsche σ-Algebra auf X immer mit $\mathcal{B}(X)$.

Aufgabe 6.1 (2 + 4 Punkte)

a) Beweisen Sie: ist (X, d) ein abzählbarer metrischer Raum, dann sind alle Teilmengen $A \subset X$ Borelmengen.

b) Beweisen Sie: ist (X, d) ein metrischer Raum und $E \subset X$ eine Borelmenge, dann sind alle Borelmengen im metrischen Raum $(E, d|_E)$ auch Borelmengen in (X, d).
Hinweis: Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset E$ ist offen in $(E, d|_E)$ genau dann, wenn $\mathcal{U} = \mathcal{V} \cap E$ für eine in (X, d) offene Teilmenge $\mathcal{V} \subset X$. Zeigen Sie, dass $\{A \subset E \mid A \in \mathcal{B}(X)\} \subset 2^E$ eine σ-Algebra auf E definiert, die alle in $(E, d|_E)$ offenen Mengen enthählt.

Aufgabe 6.2 (2 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 3 + 1 Punkte)
In dieser Aufgabe setzen wir die Existenz eines Maßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ voraus, das $\mu\big((a, b)\big) = b - a$ für alle reellen Zahlen $a < b$ erfüllt.[1] Beweisen Sie:

a) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt $\mu(\{c\}) = 0$.

b) Für alle reellen Zahlen $a < b$ gilt $\mu\big([a, b]\big) = \mu\big((a, b]\big) = \mu\big([a, b)\big) = b - a$.

c) Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gilt $\mu\big((c, \infty)\big) = \mu\big([c, \infty)\big) = \mu\big((-\infty, c)\big) = \mu\big((-\infty, c]\big) = \infty$.

d) Für jede abzählbare Teilmenge $S \subset \mathbb{R}$ gilt $\mu(S) = 0$.[2]

e) Für $S := \big\{x \in [0, 1] \bigm| x \notin \mathbb{Q}\big\}$ gilt $\mu(S) = 1$.

Das **Cantorsche Diskontinuum** $C \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$ wird wie folgt definiert. Für eine aus endlich vielen disjunkten kompakten Intervallen $[a, b]$ bestehende Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ entfernen wir aus jedem dieser Intervalle $[a, b] \subset I$ mit $\ell := b - a > 0$ das offene Teilintervall

$$(a + \ell/3, b - \ell/3) \subset [a, b] \subset I,$$

und bezeichnen die verbleibende Teilmenge mit $I' \subset I$. Die Menge C wird dann als $\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \subset [0, 1]$ definiert, wobei $I_0 := [0, 1]$ und $I_n := I'_{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

f) C ist eine Borelmenge.

g) $\mu(C) = 0$.

h) C enthält unendlich viele Elemente.[3]

---

[1] Das Lebesgue-Maß, das wir in den nächsten Wochen konstruieren werden, hat diese Eigenschaft.

[2] In der Vorlesung wurde eine ähnliche Aussage über ein fiktives Maß mit gegebenen Eigenschaften auf $\mathbb{R}^n$ bewiesen, und anschließend wurde von einigen Hörern darauf hingewiesen, dass ein viel einfacherer Beweis möglich gewesen wäre. So ein einfacher Beweis ist auch bei dieser Aufgabe möglich.

[3] Nach einem Satz von Cantor existiert eine Bijektion zwischen C und $[0, 1]$, also ist C sogar eine überabzählbare Menge, die trotzdem Maß 0 hat.

Aufgabe 6.3 (4 + 4 Punkte)
Erklären Sie explizit (mit Beweis anhand der Definition des Lebesgue-Integrals) die genaue Bedeutung vom Integral $\int_X f\,d\mu \in [0,\infty]$ einer beliebigen messbaren Funktion $f : X \to [0,\infty)$ auf den folgenden Maßräumen $(X, \mathcal{A}, \mu)$:

a) $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{N}}$, mit dem **Zählmaß**: $\mu(A) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ist die Anzahl der Elemente in $A \subset \mathbb{N}$.

b) $(X, \mathcal{A})$ ein beliebiger messbarer Raum mit dem **Dirac-Maß** $\delta_p : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ in einem Punkt $p \in X$, definiert als $\delta_p(A) := 1$ falls $p \in A$ und $\delta_p(A) := 0$ sonst.

Insgesamt: **27 Punkte**

Die folgenden Aufgaben werden teilweise in den Übungen besprochen, sind aber nicht schriftlich abzugeben.

Aufgabe 6.A
Beschreiben Sie ein Beispiel einer punktweise konvergenten Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, deren Grenzfunktion nicht Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 6.B[4]
Beweisen Sie: in jedem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ gilt für beliebige (nicht unbedingt disjunkte) abzählbare Vereinigungen messbarer Teilmengen $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{A}$ die Ungleichung

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Aufgabe 6.C
Für einen messbaren Raum $(X, \mathcal{A})$ und eine beliebige Teilmenge $E \subset X$ definiert man eine σ-Algebra auf E durch $\mathcal{A}_E := \big\{ A \cap E \in 2^E \;\big|\; A \in \mathcal{A} \big\}$. Beweisen Sie:

a) $\mathcal{A}_E \subset 2^E$ ist tatsächlich eine σ-Algebra.

b) Gehört $E \subset X$ auch zu $\mathcal{A}$, dann sind die messbaren Teilmengen in $(E, \mathcal{A}_E)$ genau die Teilmengen $A \subset E$, die auch in $(X, \mathcal{A})$ messbar sind, d.h. $\mathcal{A}_E = \big\{ A \subset E \;\big|\; A \in \mathcal{A} \big\}$.

c) Angenommen $E_1, E_2, E_3, \ldots \subset X$ sind disjunkte messbare Mengen in $(X, \mathcal{A})$ mit $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = X$, und $(Y, \mathcal{A}')$ ist ein zweiter messbarer Raum. Eine Funktion $f : (X, \mathcal{A}) \to (Y, \mathcal{A}')$ ist genau dann messbar, wenn die eingeschränkten Funktionen $f|_{E_i} : (E_i, \mathcal{A}_{E_i}) \to (Y, \mathcal{A}')$ für alle $i = 1, 2, 3, \ldots$ messbar sind.

d) Ist X ein metrischer Raum mit $\mathcal{A} := \mathcal{B}(X)$ die Borelsche σ-Algebra, $Q \subset X$ eine abzählbare Teilmenge und $f : X \to Y$ eine Funktion, deren Einschränkung $f|_{X \setminus Q} : (X \setminus Q, \mathcal{B}(X \setminus Q)) \to (Y, \mathcal{A}')$ messbar ist, dann ist $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (Y, \mathcal{A}')$ messbar. Als Spezialfall gilt: sind X und Y metrische Räume und ist $f : X \to Y$ auf dem Komplement einer abzählbaren Teilmenge $Q \subset X$ Borel-messbar (z.B. stetig), dann ist $f : X \to Y$ Borel-messbar.
Hinweis: Hier ist das Resultat von Aufgabe 6.1(b) nützlich.

e) Die Aussage in Teilaufgabe (c) ist im Allgemeinen falsch, wenn X nicht als $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ sondern als *überabzählbare* Vereinigung disjunkter messbarer Mengen präsentiert wird, oder wenn die Mengen $E_1, E_2, E_3, \ldots$ nicht alle messbar sind.

---

[4] Die ursprüngliche Version dieser Aufgabe war fehlerhaft und ist inzwischen korrigiert worden.