Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Zahlentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 1

AUFGABE 1: Beweisen Sie, was als das "Archimedische Axiom" bekannt ist: Zu beliebigen natürlichen Zahlen a, b gibt es eine natürliche Zahl n mit $n \cdot a > b$.

AUFGABE 2: (a) Jede nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{Z}$ enthält ein kleinstes Element. Mit anderen Worten: Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$, und gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $m \geq a$ für alle $m \in M$, so gibt es genau ein $m_0 \in M$, für welches gilt: $m \geq m_0$ für alle $m \in M$.

(b) Jede nach oben beschränkte nichtleere Teilmenge M von $\mathbb{Z}$ enthält ein größtes Element. Mit anderen Worten: Ist M eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$, und gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq a$ für alle $m \in M$, so gibt es genau ein $m_0 \in M$, für welches gilt: $m \leq m_0$ für alle $m \in M$.

AUFGABE 3: In der Vorlesung wurden für die Menge $\mathbb{N}$ die Peanoaxiome postuliert. Dieselben Axiome lassen sich offenbar auch für die Menge $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ postulieren. Also:

(1) $\mathbb{N}_0$ ist eine Menge, und in ihr wird ein Element 0 ("Null") ausgezeichnet.

(2) Es gibt eine "Nachfolgerfunktion" $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $N(n) \neq 0$.

(ii) Sind $m, n \in \mathbb{N}_0$ derart, dass $N(m) = N(n)$, so $n = m$.

(3) Ist $M \subset \mathbb{N}_0$ eine Teilmenge mit den Eigenschaften

(a) $0 \in M$ und

(b) für alle $n \in M$ gilt auch $N(n) \in M$,

so $M = \mathbb{N}_0$.

Dann gilt: Es gibt eindeutig bestimmte Abbildungen $+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ("Addition") und $\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ("Multiplikation") mit den folgenden Eigenschaften:

$$n + 0 = n, \quad n + N(m) = N(m + n), \quad n \cdot 0 = 0, \quad n \cdot N(m) = n \cdot m + n$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Beweisen Sie (aus den obigen Axiomen): Für $n, m \in \mathbb{N}_0$ gilt $m \cdot n = 0$ genau dann, falls $m = 0$ oder $n = 0$.

AUFGABE 4: (a) Überlegen Sie sich das *Taubenlochprinzip*: Wenn k Tauben in $k - 1$ Taubenlöchern leben, gibt es mindestens ein Taubenloch, in dem mehr als eine Taube lebt. [Hierfür gibt es nur einen Punkt.]

(b) In jeder Millionenstadt leben mindestens 100.000 Menschen, die von sich behaupten können: " Es gibt mindestens einen weiteren Bewohner dieser Stadt, der im gleichen Jahr, am gleichen Tag und zur gleichen Stunde wie ich geboren wurde."[1]

[1] Wir arbeiten unter der folgenden Hypothese: In einer Millionenstadt leben auch mindestens "fast" ebenso viele Einwohner, die noch keine 100 Jahre alt sind.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Unter den natürlichen Zahlen von 1 bis $2n$ wählen wir $n+1$ Zahlen zufällig aus. Zeigen Sie: Unter diesen muss es zwei Zahlen geben, die keinen gemeinsamen Teiler haben.

Bitte tragen Sie sich in die in die Moodle-Veranstaltung "Algebra/Zahlentheorie und ihre Didaktik (SoSe2019)" (der link findet sich auf der Vorlesungshomepage) mit dem Einschreibeschlüssel

"peano2019"

(alles kleingeschrieben) ein. Dort werden die Punkte für die Übungsaufgaben eingetragen.