

Prof. Dr. Elmar Große-Klönne  
 Institut für Mathematik

**Algebra und Zahlentheorie**  
 Übungsaufgaben, Blatt 2

AUFGABE 1: Sei  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

- (a)  $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{1}{6}(2n+1)(n+1)n$ .  
 (b)  $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .

AUFGABE 2: Seien  $b, n \in \mathbb{N}$ , dabei  $b \geq 2$ . Wir schreiben  $n \in \mathbb{N}$  als  $n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b^i$  mit (eindeutig bestimmten) ganzen Zahlen  $0 \leq a_i \leq b-1$ , fast alle  $a_i = 0$  (die Summe ist also tatsächlich eine endliche Summe, genauso wie alle nachfolgend notierten Summen).<sup>1</sup> Wir definieren dann

$$Q_b(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i, \quad \text{die } b\text{-Quersumme von } n,$$

$$A_b(n) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i, \quad \text{die alternierende } b\text{-Quersumme von } n.$$

Zeigen Sie:

- (1)  $b-1$  ist Teiler von  $n$  genau dann, wenn  $b-1$  Teiler von  $Q_b(n)$  ist.
- (2)  $b+1$  ist Teiler von  $n$  genau dann, wenn  $b+1$  Teiler von  $A_b(n)$  ist.
- (3) 3 ist Teiler von  $n$  genau dann, wenn 3 Teiler von  $Q_{10}(n)$  ist.

AUFGABE 3: (a) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler von  $a = 294$  und  $b = 201$  und schreiben Sie ihn als ganzzahlige Linearkombination von  $a$  und  $b$ .

(b) Gibt es  $x, y \in \mathbb{Z}$  mit  $73685x + 25513y = 10$ ? Falls ja, bestimmen Sie geeignete  $x, y$ .

AUFGABE 4: Es seien  $a_1, \dots, a_k$  natürliche Zahlen derart, dass  $a_1 \cdot \dots \cdot a_k + 1$  durch 3 teilbar ist.

- (a) Zeigen Sie, dass keine der Zahlen  $a_1, \dots, a_k$  durch 3 teilbar ist.
- (b) Beweisen Sie, dass wenigstens eine der Zahlen  $a_1+1, \dots, a_k+1$  durch 3 teilbar ist.
- (c) Nutzen Sie die Beweisidee von Euklid und (b), um zu zeigen, dass es sogar in der Teilmenge der natürlichen Zahlen

$$2 + 3 \cdot \mathbb{N} := \{2 + 3, 2 + 6, \dots, 2 + 3 \cdot n, \dots\}$$

unendlich viele Primzahlen gibt.

---

<sup>1</sup>Im Fall  $b = 10$  ist dies offenbar die Dezimaldarstellung von  $n$ .