Prof. Dr. Elmar Große-Klönne
Institut für Mathematik

Algebra und Zahlentheorie
Übungsaufgaben, Blatt 3

Aufgabe 1: (a) Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Geben Sie — im Lichte der Vorlesung sinnvolle — Definitionen für den größten gemeinsamen Teiler (a, b, c) und das kleinste gemeinsame Vielfache $[a, b, c]$ von a, b und c. Gilt stets $abc = [a, b, c] \cdot (a, b, c)$?

(b) Bestimmen Sie $d = (112233, 223344)$ mit Hilfe des euklidischen Algorithmus. Bestimmen Sie $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $d = 112233 \cdot x + 223344 \cdot y$. Bestimmen Sie ein *weiteres* Paar $x', y' \in \mathbb{Z}$ mit $d = 112233 \cdot x' + 223344 \cdot y'$, mit $x \neq x'$.

Aufgabe 2: (a) Sei $m \in \mathbb{N}$. Wieviele Äquivalenzklassen gibt es für die Äquivalenzrelation $. \equiv .(m)$ auf $\mathbb{Z}$? Geben Sie ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation $. \equiv .(m)$ auf $\mathbb{Z}$ an (mit anderen Worten: geben sie für jede Äquivalenzklasse einen Repräsentanten an). Geben Sie ein weiteres (vom ersten verschiedenes) solches Repräsentantensystem an.

(b) Seien $m, m' \in \mathbb{N}$ teilerfremd, sei $A \subset \mathbb{Z}$ ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation $. \equiv .(m)$ auf $\mathbb{Z}$, sei $A' \subset \mathbb{Z}$ ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation $. \equiv .(m')$ auf $\mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Die Menge

$$\{m'x + my \,|\, x \in A, y \in A'\}$$

ist ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzrelation $. \equiv .(m \cdot m')$ auf $\mathbb{Z}$.

Gilt dies auch, wenn $(m, m') > 1$?

Aufgabe 3: Wir sagen, dass eine Primzahl p die Eigenschaft $(*)$ hat, wenn auch $2p + 1$ eine Primzahl ist.

(a) Zeigen Sie, dass 7 nicht die Endziffer einer Primzahl mit der Eigenschaft $(*)$ sein kann.

(b) Zeigen Sie, dass alle Primzahlen > 5 mit der Eigenschaft $(*)$ in der Menge $5+6\cdot\mathbb{N}$ enthalten sind.

(c) Finden Sie 10 Primzahlen mit der Eigenschaft $(*)$.

Aufgabe 4: Sei $n \in \mathbb{N}$. Unter den natürlichen Zahlen von 1 bis $2n$ wählen wir $n+1$ Zahlen zufällig aus. Zeigen Sie: Unter diesen muss es zwei Zahlen geben, von denen eine die andere teilt.

Hinweis: Schreiben Sie alle betrachteten Zahlen z in der Form $z = m \cdot 2^k$.