Bachelor/Master Seminar:
Exponentialsummmen über endlichen Körpern
Prof. Dr. Elmar Große-Klönne

Sei p eine Primzahl, seien $f, g \in \mathbb{F}_p[X]$ Polynome $\neq 0$ mit Koeffizienten im endlichen Körper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Zu $x \in \mathbb{F}_p$ mit $g(x) \neq 0$ wähle einen Repräsentanten $\tilde{y} \in \mathbb{Z}$ von $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{F}_p$; die komplexe Zahl

$$\exp(\frac{2\pi i}{p}\tilde{y}) =: \exp(\frac{2\pi i}{p}\frac{f(x)}{g(x)})$$

hängt dann offensichtlich nur von $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{F}_p$ ab, nicht von der Wahl von $\tilde{y}$. Die zu f und g gehörige Exponentialsumme ist nun definiert als

$$S = \sum_{\substack{x \in \mathbb{F}_p \\ g(x) \neq 0}} \exp(\frac{2\pi i}{p}\frac{f(x)}{g(x)}).$$

Zahlreiche Fragen lassen sich an S stellen, namentlich sind Abschätzungen des Absolutwerts von S (archimedisch oder p-adisch) von großem Interesse. Auch zahlreiche Verallgemeinerungen der Summen S sind in der klassischen zahlentheoretischen Literatur studiert worden und haben die Entwicklung vieler mächtiger Methoden animiert, die auch jenseits der Theorie der Exponentialsummen von großer Relevanz sind, z.B. für die arithmetische Geometrie oder die analytische Zahlentheorie. Bis heute hält dieses Forschungsgebiet viele offene Fragen bereit.

Ziel des Seminars ist eine elementare Einführung in die Theorie der Exponentialsummmen über endlichen Körpern. Literaturvorlage ist das Vorlesungsskript [K].

Zur Konzeption der Vorträge: Es ist nicht erforderlich (und auch zeitlich i.a. kaum möglich), *alle* Beweise lückenlos zu präsentieren. Es sollten aber alle wichtigen Definitionen sorgfältig ausgeführt werden, und die grundsätzliche Logik der Entwicklung der Dinge klar werden. Beweise (oder Unterbeweisschritte), die nicht lückenlos präsentiert werden, sollten zumindest hinreichend plausibel skizziert werden. Nicht jede Unterbemerkung, die die Textvorlage macht, muss in den Vortrag aufgenommen werden.

Literatur:

[K] E. Kowalski: Exponential sums over finite fields: elementary methods, ETH Zürich (Version of September 14, 2021)

[W] D. Wan: Exponential sums over Finite Fields, J. Syst. Sci. Complex (2021) **34**, 1225 – 1278

Programm:

1. Einführung; Auffrischungen zur Theorie der endlichen Körper

[K] Introduction und Abschnitt 1.1

2. Charaktere endlicher abelscher Gruppen

[K] Abschnitt 1.2

3. Gauss Summen und Kloosterman Summen

[K] Abschnitt 2.1 und 2.2

4. Jacobi Summen, Salié Summen, Allgemeines

[K] Abschnitt 2.3 bis 2.5

5. Die Riemannsche Vermutung für Exponentialsummen; Dirichlet Charaktere

[K] Abschnitt 3 und Abschnitt 4 bis Remark 4.2

6. L-Funktionen zu Expoentialsummen

[K] Corollary 4.3 bis Proposition 4.7

7. Rationalität und Funktionalgleichung der L-Funktion

[K] Proposition 4.8 bis Proposition 4.12

8. Die Riemannsche Vermutung für multiplikative Exponentialsummen: Beweisbeginn

[K] Theorem 4.13 bis Theorem 4.17

9. Stepanov's Methode

[K] Lemma 4.18 bis zum Ende des Beweises von Proposition 4.20 (kurz vor Lemma 4.24)

10. Riemann-Roch und Abschluss des Beweises der Riemannschen Vermutung

[K] Lemma 4.24 bis Remark 4.29

Weitere Vorträge könnten über Kapitel 5 (und folgende) aus [K] berichten, oder alternativ p-adische Aspekte thematisieren, wozu [W] eine hilfreiche Vorlage ist.