Seminar Sommersemester 2024: Quadratische Zahlkörper

Prof. Dr. Elmar Große Klönne

Erster Gegenstand der Algebraischen Zahlentheorie sind die (algebraischen) *Zahlkörper*, also die endlichen Körpererweiterungen E von $\mathbb{Q}$. Gilt $[E : \mathbb{Q}] = 2$, so spricht man von *quadratischen Zahlkörpern*. Anhand der quadratischen Zahlkörper läßt sich die allgemeine Theorie der Zahlkörper in vielerlei Hinsicht sehr konkret und anschaulich illustrieren.

Vorausgesetzt werden Grundkenntnisse der Linearen Algebra und der Algebra, wie sie typischerweise im zweiten und dritten Semester erworben werden. Wir folgen dem Text

[L] Franz Lemmermeyer, **Quadratische Zahlkörper: Eine Einführung mit vielen Beispielen**, Springer Spektrum; 1. Aufl. 2017

In diesem Text werden viele schon aus der üblichen Algebra-Vorlesung bekannte Sachverhalte eingeführt beziehungsweise wiederholt. Diese Passagen sollten in den Vorträgen, wenn überhaupt, nur ganz kurz nachskizziert werden.

1. Quadratische Zahlkörper und Ganzheitsringe

[L] Abschnitte 2.1 und 2.2

2. Einheiten, prime und irreduzible Elemente

[L] Abschnitt 3.1

3. Faktorielle Ringe, Hauptidealringe, euklidische Ringe

[L] Abschnitte 3.2 bis 3.5

4. Arithmetik in einigen quadratischen Zahlkörpern I

Man stelle nach eigenem Geschmack eine attraktive Stoffauswahl aus [L] Abschnitt 4.1 und 4.2 zusammen!

5. Arithmetik in einigen quadratischen Zahlkörpern II

Man stelle nach eigenem Geschmack eine attraktive Stoffauswahl aus [L] Abschnitt 4.3 und 4.4 zusammen!

6. Ideale

[L] Abschnitt 5.1, Abschnitt 5.2 bis Seite 97 unten

7. Eindeutige Primidealzerlegung

[L] Abschnitt 5.2 ab "Die Kürzungsregel"

8. Die Idealklassengruppe

[L] Abschnitt 5.3; ist noch Zeit, so könnte auch auf Abschnitt 5.4 eingegangen werden

9. Die Lösbarkeit der Pellschen Gleichung

[L] Abschnitt 6.1

10. Weiteres zur Pellschen Gleichung

[L] Abschnitte 6.2 und 6.3