

Topologie

30. Spezielle Identifizierungen

Zu gegebenen topologischen Räumen X, Y und Punkten $x_0 \in X, y_0 \in Y$ definieren wir folgende speziellen Identifizierungen, deren geometrische Bedeutung man sich klar mache:

- Kegel über X* : $CX := X \times [0, 1]/X \times \{1\}$;
- Suspension, Einhängung oder Doppelkegel von X* : $\Sigma X := X \times [-1, 1]/(X \times \{1\}, X \times \{-1\})$;
- Wedge-Produkt von X und Y* : $X \vee Y := (X \times \{x_0\}) \cup (Y \times \{y_0\}) \subset X \times Y$;
- Smash-Produkt von X und Y* : $X \wedge Y := X \times Y/X \vee Y$;

31. Wir schreiben $X \sim Y$, wenn X und Y homöomorph sind. Man überlege sich:
 $CS^n \sim D^{n+1}$; $\Sigma D^n \sim D^{n+1}$ und $\Sigma S^n \sim S^{n+1}$; $S^1 \wedge S^1 \sim S^2$.

32. Kleinsche Flasche

Es sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $\alpha : S^1 \rightarrow S^1, \alpha z = \bar{z}$ die Spiegelung an der x -Achse. Wir definieren die *Kleinsche Flasche*, indem wir in dem Produkt $S^1 \times [0, 1]$ den Punkt $(z, 0)$ mit dem Punkt $(\alpha z, 1)$ identifizieren. Dann entsteht eine unberandete nicht-orientierbare Fläche. Man stelle \mathbb{K} als Quadrat mit geeignet gewählten Kantenidentifizierungen dar.

33. Reell-projektiver Raum

Für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ gelte $x \sim y$, wenn $x = \lambda y$ ist für ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Der Quotientenraum von $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ nach dieser Äquivalenzrelation heißt der *reell-projektive Raum* $P^n(\mathbb{R})$; man kann ihn auch als die Menge der Geraden des \mathbb{R}^{n+1} durch 0 auffassen. In dem man sich überlegt, wie der $P^n(\mathbb{R})$ aus der S^n durch Identifikationen entsteht, zeige man die Kompaktheit von $P^n(\mathbb{R})$. Zudem gebe man eine Darstellung der projektiven Ebene $P^2(\mathbb{R})$ als Zweieck mit geeigneten Kantenidentifikationen an und zeige damit, daß für die Kleinsche Flasche $\mathbb{K} = P^2(\mathbb{R}) \# P^2(\mathbb{R})$ gilt.

34. Komplex-projektiver Raum

Analog zum reellen Fall definiert man den *komplex-projektiven Raum* $P^n(\mathbb{C})$ als Äquivalenzklassen des $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ unter der Multiplikation mit Elementen aus \mathbb{C}^* . Man zeige, daß $P^1(\mathbb{C})$ homöomorph zur S^2 ist.

35. Reelle Grassmann-Mannigfaltigkeit

Es sei $G_{n,k}$ die Menge der k -dimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^n . Man überlege sich:

- die Standardwirkung der reell-orthogonalen Gruppe $O(n, \mathbb{R})$ auf \mathbb{R}^n induziert eine transitive Wirkung der $O(n, \mathbb{R})$ auf $G_{n,k}$;
- $G_{n,k}$ ist homöomorph zu $O(n, \mathbb{R})/O(k, \mathbb{R}) \times O(n-k, \mathbb{R})$; insbesondere ist $P^n(\mathbb{R})$ homöomorph zu $O(n+1, \mathbb{R})/O(1, \mathbb{R}) \times O(n, \mathbb{R})$.