Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich

Sommersemester 2012
Blatt 2
Abgabe xxx

Topologie

7. Sei X ein zusammenhängender metrischer Raum mit mehr als nur einem Punkt. Zeige: X kann weder endlich noch abzählbar sein.

8. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$ eine abzählbare Menge. Zeige: $\mathbb{R}^n - D$ ist zusammenhängend.

9. Wir definieren den topologischen Rand $\mathrm{Fr}\,(A)$ einer Teilmenge $A \subset X$ eines topologischen Raumes X als die Menge aller derjenigen Punkte, die im Abschluß von A, aber nicht im Inneren von A liegen. Man zeige folgende Eigenschaften und gebe für die behaupteten Inklusionen Beispiele, aus denen hervorgeht, dass Gleichheit nicht gilt:

a) $\mathrm{Fr}\,(A) = \overline{A} \cap \overline{X - A}$ und $\mathrm{Fr}\,(A) = \mathrm{Fr}\,(X - A)$;
b) $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}\,(A)$ und $\mathrm{Fr}\,(A) \cap \mathrm{Int}\,(A) = \emptyset$;
c) $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(A)) \subset \mathrm{Fr}\,(A)$ und $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(A))) = \mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(A))$;
d) $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Int}\,(A)) \subset \mathrm{Fr}\,(A)$ und $\mathrm{Fr}\,(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}\,(A)$;
d) $X = \mathrm{Int}\,(A) \cup \mathrm{Fr}\,(A) \cup \mathrm{Int}\,(X - A)$.

10. Sei $C \subset X$ eine zusammenhängende Menge in einem metrischen Raum X. Ist $A \subset X$ eine weitere Teilmenge und gilt $C \cap A \neq \emptyset \neq C \cap (X - A)$, so folgt $C \cap \mathrm{Fr}\,(A) \neq \emptyset$.

11. Induzierte Topologie
Sei $(X, \mathfrak{Top})$ ein topologischer Raum und $M \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Man zeige, dass durch $\mathfrak{Top}_M := \{U \cap M \,|\, U \in \mathfrak{Top}\}$ eine Topologie auf M definiert wird (die *induzierte Topologie* oder *Teilraumtopologie* von M) und beschreibe deren abgeschlossenen Mengen.

12. Ist X ein $\mathcal{T}_1$-, $\mathcal{T}_2$- bzw. $\mathcal{T}_3$-Raum, so haben alle seine Unterräume (mit der induzierten Topologie) die gleiche Eigenschaft.