Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich

Sommersemester 2014
Blatt 1
Abgabe xxx

Topologie

1. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Wir definieren $d_1 = d/(d+1)$ und $d_2 = \min(d, 1)$.
Zeige: d_1 und d_2 sind ebenfalls Metriken auf X, erzeugen die gleiche Topologie wie d und haben die gleichen Cauchy-Folgen wie d.

2. Hilbert-Würfel
Man überprüfe, dass der in der Vorlesung definierte Hilbert-Würfel $H = \{(x_1, x_2, \ldots) \,|\, 0 \leq x_i \leq 1\}$ mit der Abstandsfunktion

$$d(x, y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

ein metrischer Raum ist.

3. Man zeige, dass auf $\mathbb{R}$ durch

$$d(x, y) \;=\; \Big|\, \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \,\Big|$$

eine Metrik definiert ist, die die gleiche Topologie wie die euklidische Metrik $d_0 = |x - y|$ induziert. Im Gegensatz zu $(\mathbb{R}, d_0)$ ist aber $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig.

4. Fluß-Metrik
Sei $X = \mathbb{R}^2$ und der Abstand zweier Punkte $p = (x_1, y_1)$, $q = (x_2, y_2)$ definiert durch

$$d(p, q) \;=\; \begin{cases} |y_1 - y_2| & x_1 = x_2 \\ |y_1| + |y_2| + |x_1 - x_2| & x_1 \neq x_2\,. \end{cases}$$

Man zeige: (X, d) ist ein metrischer Raum. Wie sehen die Kugeln der Fluß-Metrik aus ? Wann konvergiert eine Punktfolge $p_n \in \mathbb{R}^2$ in dieser Metrik ?

5. Sei X ein topologischer Raum. Zeige:

a) Ist $U \subset X$ offen, so gilt $U \subset \overline{\mathrm{Int}\,(\overline{U})}$ und $\overline{U} = \overline{\mathrm{Int}\,(\overline{U})}$.
b) Ist $A \subset X$ abgeschlossen, so gilt $\overline{\mathrm{Int}\,(A)} \subset A$.

6. Sei $U \subset X$ eine offene und $A, B \subset X$ beliebige Teilmengen eines topologischen Raumes X.
Man überlege sich $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$ und beweise damit $U \cap \overline{A} \subset \overline{U \cap A}$ und $\overline{U \cap \overline{A}} = \overline{U \cap A}$.

Literatur

– A. Dold, *Lectures on algebraic topology*, Springer-Verlag 1972.
– R. Engelking, *General Topology*, Sigma Series in Pure Mathematics 6, Heidermann, Berlin 1992.
– R. Engelking and K. Sieklucki, *Topology. A geometric approach*, Sigma Series in Pure Mathematics 4, Heidermann, Berlin 1992.
– A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press 2001.
– Sze-Tseu Hu, *Homotopy theory*, Academic Press 1959.
– J.L. Kelley, *General topology*, Van Nostrand 1955.
– E. Ossa, *Topologie*, Vieweg-Verlag 1992.
– H. Seifert und W. Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner-Verlag 1934.
– E. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill 1966.