Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich

Sommersemester 2014
Blatt 10
Abgabe xxx

Topologie

56. Beweisen Sie, dass jede Untergruppe von Index zwei einer diskreten Gruppe ein Normalteiler ist. Leiten Sie daraus ab, dass die zusammenhängenden 2-fachen Überlagerungen eines zusammenhängenden Raumes X zu den nichttrivialen Homomorphismen $f : \pi_1(X) \to \mathbb{Z}_2$ korrespondieren.

57. Wieviele zweifachen Überlagerungen hat die Kleinsche Flasche ? Beschreiben Sie den Totalraum dieser Überlagerungen.

58. Beschreiben Sie alle zweifachen und dreifachen Überlagerungen von $S^1 \vee S^1$ mit zusammenhängendem Totalraum.

59. Sei M^2_g die Oberfläche des Henkelkörpers mit g Henkeln (also $M^2_0 = S^2, M^2_1 = T^2$ usw.). Existieren Überlagerungen von M^2_g, $g \geq 2$ auf den Torus M^2_1 ? Existieren Überlagerungen von M^2_g auf M^2_2 ? Beweisen Sie allgemein: Existiert eine Überlagerung von $M^2_{g^*}$ nach M^2_g, so existiert eine natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $g^* - 1 = k \cdot (g-1)$. Insbesondere kann M^2_3 nicht durch $M^2_4, M^2_6 \ldots$ überlagert werden. Kann es durch $M^2_5, M^2_7, \ldots$ überlagert werden ?

60. Sei G eine endliche Gruppe, die stetig und frei auf einem topologischen Raum X wirkt. Beweisen Sie, dass G diskontinuierlich auf X wirkt, also $p : X \to X/G$ eine Überlagerung ist.

61. Sei X ein bogenzusammenhängender, lokal-bogenzusammenhängender Raum mit endlicher Fundamentalgruppe. Beweisen Sie, dass jede stetige Abbildung $f : X \to S^1$ homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

62. Sei G eine zusammenhängende, lokal-zusammenhängende topologische Gruppe und bezeichne $\bar{G}$ die universelle Überlagerung des topologischen Raumes G. Beweisen Sie, dass $\bar{G}$ eine topologische Gruppe ist und mit der dortigen Gruppenoperation wird die Projektion von $\bar{G}$ auf G ein Gruppenhomomorphismus. Der Kern dieses Homomorphismus ist im Zentrum von $\bar{G}$ enthalten.

63. Wenden Sie Aufgabe 62 auf die Gruppe $G = SL(2, \mathbb{R})$ an und beweisen Sie, dass $\pi_1\big(SL(2, R)\big) = \mathbb{Z}$ gilt. Die Gruppe $\bar{G}$ ist also eine unendliche Überlagerung von $SL(2, \mathbb{R})$. Beweisen Sie weiterhin, dass diese Überlagerungsgruppe keine treue, endlichdimensionale Darstellung besitzt.