Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich

Sommersemester 2014
Blatt 3
Abgabe xxx

Topologie

13. Endliche Komplement-Topologie
Sei X eine beliebige unendliche Menge. Man zeige, dass durch

$$\mathfrak{Top} \ := \ \{ M \subset X \mid \mathrm{card}\,(X - M) \ < \ \infty \} \ \cup \ \{\emptyset\}$$

eine Topologie auf X definiert wird, bezüglich der X kompakt und ein $\mathcal{T}_1$-Raum, aber kein $\mathcal{T}_2$-Raum ist.

14. Pfeil-Topologie
Sei $X = \mathbb{R}$ mit der in der Vorlesung definierten Pfeil-Topologie. Zeige:

a) $\mathbb{Q}$ liegt dicht in X;
b) X hat keine abzählbare Basis der Topologie;
c) Jede offene Überdeckung von X enthält eine abzählbare Teilüberdeckung.

15. Niemycki-Ebene
Sei Y die in der Vorlesung definierte Niemycki-Ebene.

a) Man überlege sich durch Hinzunahme eines Punktes zur Niemycki-Ebene Y ein Beispiel, welches belegt, dass Unterräume von $\mathcal{T}_4$-Räumen nicht notwendigerweise wieder $\mathcal{T}_4$-Räume sind;
b) Man zeige, dass die Niemycki-Ebene Y nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$ mit der Pfeiltopologie ist.

16. Jeder endliche $\mathcal{T}_1$-Raum ist diskret.

17. Ist X ein $\mathcal{T}_2$-Raum mit einer dichten Teilmenge der Kardinalität m, so gilt $\mathrm{card}\,(X) \leq 2^{2^m}$.

18. Ein kompakter metrischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu beliebigen Punkten $a, b \in X$ gewisse Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ gibt derart, dass $x_1 = a$, $x_k = b$ und $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ für alle $i = 1, \ldots, k-1$ gilt.