Topologie

19. Sei X ein topologischer Raum. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:

a) X ist ein $\mathcal{T}_2$-Raum;
b) Die Diagonale $\Delta \subset X \times X$ ist abgeschlossen;
c) Sei $x_0 \in X$. Dann besteht der Durchschnitt der Abschlüsse aller x_0 enthaltenden offenen Mengen nur aus x_0:

$$\bigcap_{x_0 \in U \text{ offen}} \overline{U} \;=\; \{x_0\}\,.$$

Man folgere, dass eine topologische $\mathcal{T}_1$-Gruppe G notwendigerweise auch ein $\mathcal{T}_2$-Raum ist. (*Bemerkung: es gilt sogar, dass sie dann ein $\mathcal{T}_{3^{1/2}}$-Raum ist, dies ist aber wesentlich schwieriger zu beweisen.*)

20. Es seien X und Y ein topologische Räume sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) Ist $X = \bigcup_{t\in T} U_t$ Vereinigung einer Familie von offenen Mengen $U_t \subset X$, dann ist f genau dann stetig, wenn $f|_{U_t}$ für alle $t \in T$ stetig ist;
b) Ist $X = A \cup B$ Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen $A, B \subset X$, so ist f genau dann stetig, wenn $f|_A$ und $f|_B$ stetig sind. Gilt die analoge Aussage immer noch, wenn man X in eine Familie abgeschlosser Mengen zerlegt ?
c) Ist $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ Vereinigung von beliebigen Teilmengen $A_1, A_2, \ldots \subset X$ mit der Eigenschaft, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ immer $A_n \subset \operatorname{Int}(A_{n+1})$ gilt, so ist f genau dann stetig, wenn alle $f|_{A_n}$ stetig sind.

21. Sei $A \subset X$ eine beliebige Teilmenge eines topologischen Raumes X. Es bezeichne A^- die abgeschlossene Hülle und A' das Komplement von A. Zeige: Durch Anwenden dieser beiden Operationen auf A entstehen höchstens 14 verschiedene Mengen.

22. Man zeige, dass für einen metrischen Raum X folgende Bedingungen äquivalent sind:

a) X enthält eine abzählbare dichte Teilmenge;
b) X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

Ist dies der Fall, so heißt der metrische Raum X *separabel.* Gilt eine der beiden Implikationen für einen beliebigen topologischen Raum ?

23. Hilbert-Würfel II
Wir betrachten den Hilbert-Raum l^2 aller Folgen $x = (x_n)_n$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ und der Metrik

$$d(x,y) \;=\; \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2\right)^{1/2} .$$

In l^2 definieren wir $I = \{(x_1, x_2, \ldots) \,|\, 0 \le x_j \le 1/j\}$. Man zeige, dass I zum in Aufgabe 2 definierten Hilbert-Würfel H homöomorph sowie separabel und kompakt ist.

24. Vietoris-Topologie

Für jeden topologischen Raum X bezeichnen wir mit 2^X die Familie aller nicht-leeren abgeschlossenen Teilmengen von X. Man überprüfe, dass die Familie aller Mengen der Form

$$V(U_1, U_2, \ldots, U_k) \;=\; \{B \in 2^X \mid B \subset \bigcup_{i=1}^{k} U_i \text{ und } B \cap U_i \neq \emptyset \text{ für } i = 1, 2, \ldots, k\},$$

wobei $U_1, \ldots, U_k$ offene Teilmengen von X sind, eine Basis einer Topologie auf 2^X definieren (*Vietoris-Topologie*). Weiterhin zeige man:

a) Ist X ein $\mathcal{T}_1$-Raum, dann ist auch 2^X ein $\mathcal{T}_1$-Raum;
b) X ist genau dann ein $\mathcal{T}_3$-Raum, wenn 2^X ein $\mathcal{T}_2$-Raum ist und X ein $\mathcal{T}_1$-Raum ist.