Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich

Sommersemester 2014
Blatt 6
Abgabe xxx

Topologie

30. Spezielle Identifizierungen
Zu gegebenen topologischen Räumen X, Y und Punkten $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ definieren wir folgende speziellen Identifizierungen, deren geometrische Bedeutung man sich klar mache:

a) *Kegel über* X: $CX := X \times [0,1]/X \times \{1\}$;
b) *Suspension, Einhängung* oder *Doppelkegel von* X: $\Sigma X := X \times [-1,1]/(X \times \{1\}, X \times \{-1\})$;
c) *Wedge-Produkt von* X *und* Y: $X \vee Y := (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$;
d) *Smash-Produkt von* X *und* Y: $X \wedge Y := X \times Y/X \vee Y$;

31. Wir schreiben $X \sim Y$, wenn X und Y homöomorph sind. Man überlege sich:
$CS^n \sim D^{n+1}$; $\Sigma D^n \sim D^{n+1}$ und $\Sigma S^n \sim S^{n+1}$; $S^1 \wedge S^1 \sim S^2$.

32. Kleinsche Flasche
Es sei $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ und $\alpha : S^1 \to S^1$, $\alpha z = \bar{z}$ die Spiegelung an der x-Achse. Wir definieren die *Kleinsche Flasche*, indem wir in dem Produkt $S^1 \times [0,1]$ den Punkt $(z,0)$ mit dem Punkt $(\alpha z, 1)$ identifizieren. Dann entsteht eine unberandete nicht-orientierbare Fläche. Man stelle $\mathbb{K}$ als Quadrat mit geeignet gewählten Kantenidentifizierungen dar.

33. Reell-projektiver Raum
Für $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ gelte $x \sim y$, wenn $x = \lambda y$ ist für ein $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Der Quotientenraum von $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ nach dieser Äquivalenzrelation heißt der *reell-projektive Raum* $P^n(\mathbb{R})$; man kann ihn auch als die Menge der Geraden des $\mathbb{R}^{n+1}$ durch 0 auffassen. In dem man sich überlegt, wie der $P^n(\mathbb{R})$ aus der S^n durch Identifikationen entsteht, zeige man die Kompaktheit von $P^n(\mathbb{R})$. Zudem gebe man eine Darstellung der projektiven Ebene $P^2(\mathbb{R})$ als Zweieck mit geeigneten Kantenidentifikationen an und zeige damit, daß für die Kleinsche Flasche $\mathbb{K} = P^2(\mathbb{R}) \# P^2(\mathbb{R})$ gilt.

34. Komplex-projektiver Raum
Analog zum reellen Fall definiert man den *komplex-projektiven Raum* $P^n(\mathbb{C})$ als Äquivalenzklassen des $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ unter der Multiplikation mit Elementen aus $\mathbb{C}^*$. Man zeige, daß $P^1(\mathbb{C})$ homöomorph zur S^2 ist.

35. Reelle Grassmann-Mannigfaltigkeit
Es sei $G_{n,k}$ die Menge der k-dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Man überlege sich:

a) die Standardwirkung der reell-orthogonalen Gruppe $O(n,\mathbb{R})$ auf $\mathbb{R}^n$ induziert eine transitive Wirkung der $O(n,\mathbb{R})$ auf $G_{n,k}$;
b) $G_{n,k}$ ist homöomorph zu $O(n,\mathbb{R})/O(k,\mathbb{R}) \times O(n-k,\mathbb{R})$; insbesondere ist $P^n(\mathbb{R})$ homöomorph zu $O(n+1,\mathbb{R})/O(1,\mathbb{R}) \times O(n,\mathbb{R})$.