Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin
Prof. Dr. sc. Thomas Friedrich

Sommersemester 2014
Blatt 8
Abgabe xxx

Topologie

44. Kombinatorische Euler-Charakteristik
Sei K ein endlicher CW-Komplex, und sei α_q die Anzahl seiner q-dimensionalen Simplizees. Die Zahl

$$\chi(K) \;=\; \sum_{0\leq q}(-1)^q\alpha_q$$

heißt die (kombinatorische) *Euler-Charakteristik* von K. A priori hängt diese Invariante zunächst von der CW-Zerlegung und nicht nur vom unterliegenden topologischen Raum ab (in der Vorlesung wird allerdings bewiesen werden, dass dies nicht der Fall ist). Man zeige:
a) Die Euler-Charakteristik des n-Simplex Δ_n ist 1.
b) Bezüglich jeder CW-Zerlegung hat S^1 die Euler-Charakteristik 0.
c) Faßt man die platonischen Körper (Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder, Dodekaeder) als Simplizialzerlegungen der S^2 auf, so berechnet sich deren Euler-Charakteristik zu 2.
(*Bemerkung: der Eulersche Polyedersatz (1750) besagt eben, dass χ für jedes dreidimensionale konvexe Polyeder 2 ist.*)
d) Berechnen Sie die Euler-Charakteristik einer kompakten Fläche ohne Rand indem Sie diese geeignet als CW-Komplex darstellen. Insbesondere: die Euler-Charakteristik der Torusoberfläche und der Kleinschen Flasche sind beide gleich Null.

45. Eigenschaften der Euler-Charakteristik
a) Ist der CW-Komplex K die Vereinigung zweier Teilkomplex, $K = K_1 \cup K_2$, so gilt

$$\chi(K) \;=\; \chi(K_1) + \chi(K_2) - \chi(K_1 \cap K_2)\ .$$

Berechnen Sie mittels dieser Formel nochmals die Euler-Charakteristik eine randlosen, kompakten Fläche (Sphäre mit k Henkeln).
b) Ist $L \subset K$ ein Teilkomplex und K/L derjenige CW-Komplex, welcher aus K durch Zusammenziehen von L entsteht, so gilt

$$\chi(K) \;=\; \chi(L) + \chi(K/L) - 1\ .$$

c) Sind K und L endliche CW-Komplex, so gilt $\chi(K \times L) \;=\; \chi(K)\cdot\chi(L)$.

46. Benutzen Sie die Formeln der Aufgabe 45 und berechnen Sie damit die Euler-Charakteristik des Kegels $C(K)$ und der Einhängung $\Sigma(K)$ über einem CW-Komplex K sowie die Euler-Charakteristik des Wedge- und Smash-Produktes $K \vee L$ bzw. $K \wedge L$ zweier CW-Komplexe (siehe Aufgabe 30, Blatt6).

47. Abbildungsgrad für Abbildungen von S^1 in sich
Es bezeichne $p : I \to S^1$ die Abbildung $p(t) = \exp(2\pi i t)$.
a) Sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(1) = n \in \mathbb{Z}$. Man überlege sich: durch

$$\hat{\varphi} \;=\; p\circ\varphi\circ p^{-1}, \quad \text{also} \quad \hat{\varphi}(\exp(2\pi i t)) \;=\; \exp(2\pi i\varphi(t))$$

ist eine eindeutige, stetige Funktion $\hat{\varphi} : S^1 \to S^1$ definiert.
b) Zu jeder stetigen Abbildung $f : S^1 \to S^1$ gibt es genau eine stetige Abbildung $\varphi : I \to \mathbb{R}$ mit $f(z) = f(1)\cdot\hat{\varphi}(z)$ für alle $z \in S^1$ und $\varphi(0) = 0$. Insbesondere ist dann $\exp(2\pi i\varphi(1)) = 1$, also $\varphi(1) \in \mathbb{Z}$. Die ganze Zahl $\varphi(1)$ heißt der *Abbildungsgrad von f*, geschrieben $\deg(f)$.

c) Für $n \in \mathbb{Z}$ hat die Abbildung $g_n : S^1 \to S^1$, $g_n(z) = z^n$ den Grad n;
d) Ist $f : S^1 \to S^1$ differenzierbar, so kann der Abbildungsgrad durch folgendes Integral berechnet werden:

$$\deg(f) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_{S^1} \frac{f'(\mathfrak{z})}{f(\mathfrak{z})} d\mathfrak{z} \;.$$

e) Sei $z_0 \in S^1$ ein regulärer Wert der glatten Abbildung $f : S^1 \to S^1$ und $f^{-1}(z_0) = \{w_1, \ldots, w_k\}$ die Urbildmenge. Wir definieren $\epsilon(w_i) = \pm 1$ je nachdem, ob das Differenzial $df : T_{w_i}S^1 \to T_{z_0}S^1$ an der Stelle w_i die Orientierung erhält oder ändert. Beweisen Sie

$$\deg(f) \;=\; \sum_{i=1}^{k} \epsilon(w_i) \;.$$

f) Man beweise: Zwei Abbildungen $f, g : S^1 \to S^1$ sind genau dann homotop, wenn sie den gleichen Abbildungsgrad haben. Insbesondere ist eine Abbildung genau dann nullhomotop, falls sie den Abbildungsgrad 0 hat.
g) Für $f, g : S^1 \to S^1$ gilt: $\mathrm{grad}\,(f \circ g) = \mathrm{grad}\,(f) \cdot \mathrm{grad}\,(g)$; insbesondere hat jeder Homöomorphismus den Abbildungsgrad ± 1.

48. Anwendungen des Abbildungsgrades
Beweisen Sie:
a) Es existiert keine stetige Abbildung (Retrakt) $r : D^2 \to S^1$ der abgeschlossenen Kreisscheibe D^2 auf ihren Rand S^1 mit $r(x) = x$ für alle $x \in S^1$.
b) Jede stetige Abbildung $f : D^2 \to D^2$ hat einen Fixpunkt (*Brouwerscher Fixpunktsatz* in Dimension zwei).
c) Zu jeder stetigen Abbildung $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt es einen Punkt $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$ (*Satz von Borsuk und Ulam* in Dimension zwei).
d) Sei $f : D^2 \to \mathbb{R}^2$ eine stetige Abbildung mit $f(-x, -y) = -f(x, y)$ für alle Punkte $(x, y) \in S^1$ aus dem Rand der Kreisscheibe. Beweisen Sie, dass ein Punkt $(x_0, y_0) \in D^2$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ existiert. Wenden Sie dies auf das Gleichungssystem

$$x \cdot \cos(y) \;=\; x^2 + y^2 - 1 \;, \quad y \cdot \cos(x) \;=\; \sin(2\pi(x^2 + y^2))$$

an und beweisen Sie die Existenz einer Lösung.