

# TOPOLOGIE SS2014

Lösungshinweise zu Serie 10 ohne Garantie auf Richtigkeit. Fragen und Hinweise bitte an [groegerj@mathematik.hu-berlin.de](mailto:groegerj@mathematik.hu-berlin.de).

## Serie 10

### Aufgabe 56

Sei  $H \subseteq G$  Untergruppe vom Index 2. Nach Def. ist also die Anzahl der Mengen  $gH$  bzw.  $Hg$  für  $g \in G$  gleich 2. Sei nun  $g \in G \setminus H$ . Dann erhalten wir disjunkte Vereinigungen

$$G = H \dot{\cup} gH = H \dot{\cup} Hg$$

Es folgt  $gH = Hg$ , damit ist  $H$  Normalteiler.

Die Menge aller  $G$ -Normalteiler ist bijektiv zur Menge aller Homomorphismen  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ : Sei  $H \subseteq G$  Normalteiler. Definiere  $f$  als kanonische Projektion  $f := \pi : G \rightarrow G/H \cong \mathbb{Z}_2$ , klar ein Homomorphismus. Umgekehrt, sei  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$  Homomorphismus. Dann ist  $H := \ker f$  Normalteiler, denn  $gHg^{-1} \subseteq H$  nach folgender Rechnung

$$f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g^{-1}) = f(g)f(g^{-1}) = e$$

für  $h \in H$ .

Sei nun  $G = \pi_1(X)$  Fundamentalgruppe eines hinreichend zsh. Raumes (wegzsh., lokal wegzsh., semi-lokal-einfach-zsh.). Dann entsprechen die zsh. Überlagerungen den Konjugationsklassen  $[H]$  von Untergruppen von  $G$ , und die Anzahl der Blätter ist der Index von  $H$  in  $G$ . Die Konjugationsklassen  $[H] = [gHg^{-1}]$  sind für Normalteiler aber einelementig. Über die obige Charakterisierung folgt die Behauptung: Die wegzsh. 2-fachen Überlagerungen von  $X$  entsprechen den nichttrivialen Homomorphismen  $f : \pi_1(X \rightarrow \mathbb{Z}_2)$ .

### Aufgabe 57

Sei  $G$  die Gruppe der Transformationen  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  wie in Aufgabe 55, die von  $\alpha(z) = z + i$  und  $\beta(z) = \bar{z} + 1 + i$  erzeugt wird. Wir haben dort gesehen, dass alle Elemente von der Form  $\alpha^m \beta^n$  sind. Deren explizite Form zeigt, dass  $G$  eigentlich diskontinuierlich auf  $\mathbb{C}$  wirkt. Damit ist die Projektion  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/G$  eine Überlagerung,  $\mathbb{C}$  ist einfach-zsh., also die universelle Überlagerung. Für diesen Fall gibt es einen Gruppenisomorphismus der Fundamentalgruppe von  $\mathbb{C}/G$  mit der Gruppe der Deckbewegungen (Zieschang, Kor. 6.5.6), die aber mit  $G$  übereinstimmt (Zieschang, Bsp. 6.5.2f).

Nach Aufgabe 55, ist  $G$  zur Fundamentalgruppe  $\pi_1(K^2)$  der Kleinschen Flasche isomorph. Das ist kein Zufall: Betrachte das Quadrat  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  und eine Randidentifikation induziert von  $\alpha|_{[0,1] \times \{0\}}$  und  $\beta|_{\{0\} \times [0,1]}$ . Der entsprechende Quotientenraum ist offenbar homöomorph zu  $K^2$ . Andererseits ist jeder Punkt von  $\mathbb{C}$  durch die  $G$ -Wirkung auf  $\mathbb{C}$  zu genau einem Punkt von  $X$  äquivalent. Es folgt eine Bijektion  $\mathbb{C}/G \rightarrow X$ , die auch ein Homöomorphismus ist. Damit ist  $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/G$  die universelle Überlagerung der Kleinschen Flasche.

Zweifache Überlagerungen von  $K^2$  entsprechen Untergruppen  $H$  vom Index zwei von  $G = \pi_1(K^2)$ , und die entsprechende Überlagerung ist die Projektion  $\mathbb{C}/H \rightarrow \mathbb{C}/G$  (siehe z.B. Beweis von Satz 6.6.1 Zieschang). Nach Aufgabe 56 entsprechen diese Untergruppen den Homomorphismen  $f : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$  über  $H = \ker(f)$ .

Jeder solche Homomorphismus ist eindeutig bestimmt durch  $f(\alpha)$  und  $f(\beta)$ . Es gibt genau drei Möglichkeiten:

1.  $f(\alpha) = 0$  und  $f(\beta) = 1$ :

Es folgt  $f(\alpha^m \beta^n) = m \cdot f(\alpha) + n \cdot f(\beta) = [n] \in \mathbb{Z}_2$  und damit sofort

$$\ker(f) = \{\alpha^m \beta^{2n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \langle \alpha, \beta^2 \rangle$$

Betrachte das Rechteck  $R \subseteq \mathbb{C}$  mit den Ecken  $0, 2, 2+i, i$ . Betrachte die Randidentifikationen von  $R$  gegeben durch  $\alpha|_{[0,2] \times \{0\}}$  und  $\beta^2|_{\{0\} \times [0,1]}$ . Dann gilt  $R/\sim = T^2$  der Torus. Jeder Punkt von  $\mathbb{C}/\ker(f)$  wird mit genau einem Punkt aus  $R/\sim$  identifiziert, also gilt  $R/\sim \cong \mathbb{C}/\ker(f)$ . Der Totalraum der Überlagerung ist homöomorph zum Torus  $T^2$ , und die Projektionsabbildung ist gegeben durch Projektion des großen Rechtecks auf das kleine bzgl. Identifikationen.

2.  $f(\alpha) = 1$  und  $f(\beta) = 0$ :

Es folgt wie oben

$$\ker(f) = \{\alpha^{2m} \beta^n \mid m, n \in \mathbb{Z}\} = \langle \alpha^2, \beta \rangle$$

Betrachte das Rechteck  $R$  mit den Ecken  $-i/2, 1 - i/2, 1 + 3i/2, 3i/2$  und Randidentifikationen durch  $\alpha^2|_{[0,1] \times \{-1/2\}}$  und  $\beta|_{\{0\} \times [-1/2, 3/2]}$ . Dann gilt  $\mathbb{C}/\ker(f) \cong R/\sim \cong K^2$ , und der Totalraum der Überlagerung ist die Kleinsche Flasche selbst.

3.  $f(\alpha) = 1$  und  $f(\beta) = 1$ :

Es folgt wie oben

$$\ker(f) = \{\alpha^m \beta^n \mid m + n \text{ gerade}\} = \langle \alpha^2, \alpha\beta \rangle$$

Betrachte das Rechteck mit Ecken  $0, 1, 1+2i, 2i$  und Randidentifikationen  $\alpha^2|_{[0,1] \times \{0\}}$  und  $\alpha\beta|_{\{0\} \times [1,2]}$ . Dann gilt  $\mathbb{C}/\ker(f) \cong R/\sim \cong K^2$  und der Totalraum ist wieder die Kleinsche Flasche selbst. Achtung: Die Überlagerung ist trotzdem eine andere als die in 2.

## Aufgabe 58

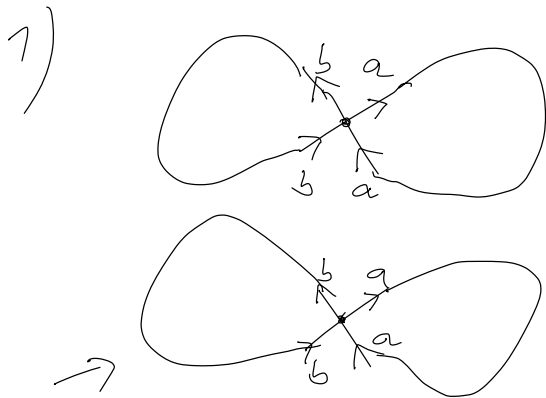
Zweifache Überlagerungen von  $S^1 \vee S^1$ . Sei  $x_0$  der "verbindende Punkt". Betrachte eine glm. überlagerte Umgebung von  $x_0$ . Diese hat die Form eines Kreuzes und hat bzgl. einer Überlagerungsabb. zwei disjunkte und jeweils homöomorphe Urbilder. Sei  $x \in X$  von  $x_0$  verschieden. Eine glm. überl. Umgebung davon ist ein Intervall, dessen Urbild bzgl. Überlagerungsabb. disjunkte Vereinigung zweier Intervalle ist. Betrachte zwei solche Intervalle in  $X$ , die sich nicht-leer schneiden, also ein größeres Intervall bilden. Die Urbilder setzen sich auch jeweils zu Intervallen zusammen usw. Man erhält damit folgendes Rezept, um alle zweifachen Überlagerungen zu bestimmen:

Zeichne zwei Kopien von  $x_0$  mit jeweils vier Kanten. Beschrifte je zwei mit  $a$  und je zwei mit  $b$ . Zeichne je einen ausgehenden und einen eingehenden Pfeil. Verbinde jeweils  $a$ - mit  $a$ -Kanten und  $b$ - mit  $b$ -Kanten, ausgehend zu eingehend. Siehe Skizze.

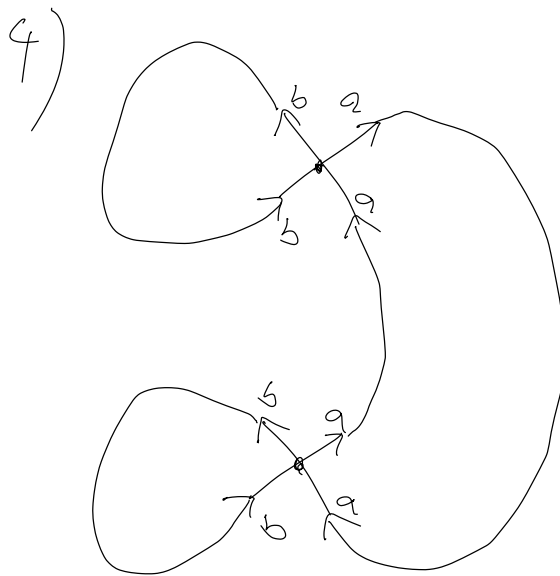
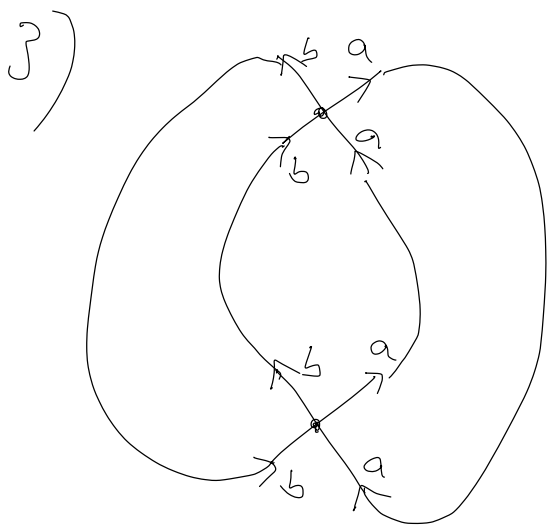
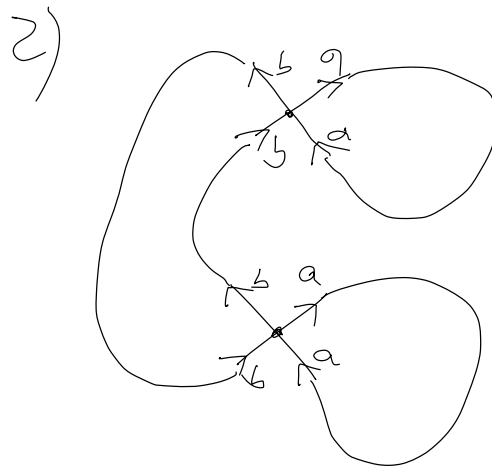
Dreifache Überlagerungen analog.

# Topologie SS2014 A58

2-fache  $\tilde{U}L$  von  $S^1 \vee S^1$

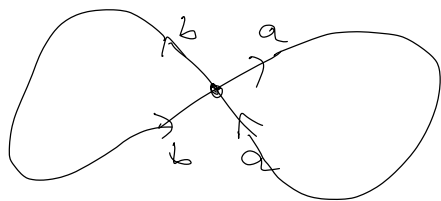


→ Totalraum nicht  $\cong S^1$ .



↑  
nicht äquiv. zu 2)!

$S^1 \vee S^1$



### Aufgabe 59

Sei  $M_g^2$  die orientierte kompakte Fläche ohne Rand vom Geschlecht  $g$ , d.h.  $M_g^2 = S^2 \# T^2 \dots \# T^2$ . In Aufgabe 44 haben wir eine CW-Zerlegung konstruiert, bestehend aus einem Punkt,  $2g$  Kanten sowie einer Fläche.

Sei nun  $p : M_{g^*}^2 \rightarrow M_g^2$  eine Überlagerung. Für  $x_0 \in M_g^2$  ist die Urbildmenge  $p^{-1}(x_0)$  eine diskrete Teilmenge des kompakten Raumes  $M_{g^*}^2$ , daher endlich. Sei  $k \in \mathbb{N}$  die Anzahl der Elemente, d.h. die Anzahl der Blätter der Überlagerung.

Die Kugel  $D^n$  ist einfach-zsh. Jede charakteristische Abb.  $\chi_e : D^n \rightarrow M_g^2$  bzgl. der Zelle  $e$  der CW-Zerlegung von  $M_g^2$  besitzt nach dem Liftungstheorem einen Lift  $\tilde{\chi}_e : D^n \rightarrow M_{g^*}^2$  pro Hebung eines fixierten Punktes, d.h. besitzt genau  $k$  solche Lifts. Es ist klar, dass die Bilder aller solchen Lifts vereinigt  $M_{g^*}^2$  ergeben und die CW-Axiome erfüllt sind, man erhält also eine CW-Zerlegung von  $M_{g^*}^2$ , die in jeder Dimension genau  $k$  mal mehr Zellen hat als  $M_g^2$ . Damit folgt unmittelbar für die Eulercharakteristik

$$\chi(M_{g^*}^2) = k \cdot \chi(M_g^2)$$

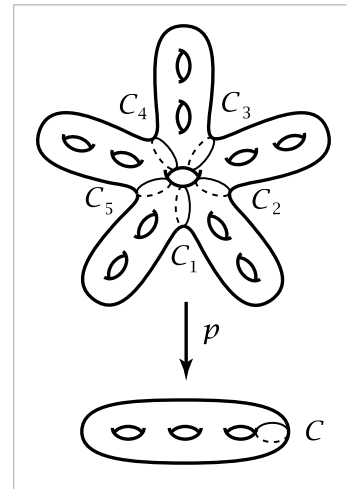
Andererseits wissen wir (aus der urspr. CW-Zerlegung) dass  $\chi(M_g^2) = 2 - 2g$  gilt. Es folgt als notwendige Bedingung für die Existenz einer  $k$ -fachen Überlagerung also die Formel

$$g^* - 1 = k \cdot (g - 1)$$

Diese Formel ist auch hinreichend, d.h. in diesem Fall existiert immer eine Überlagerung  $p : M_{g^*}^2 \rightarrow M_g^2$ , siehe Hatcher, Seite 73 (s. nächste Seite).

something weaker: Every point  $x \in X$  has a neighborhood  $U$  such that  $U \cap g(U)$  is nonempty for only finitely many  $g \in G$ . Many symmetry groups have this proper discontinuity property without satisfying  $(*)$ , for example the group of symmetries of the familiar tiling of  $\mathbb{R}^2$  by regular hexagons. The reason why the action of this group on  $\mathbb{R}^2$  fails to satisfy  $(*)$  is that there are **fixed points**: points  $y$  for which there is a nontrivial element  $g \in G$  with  $g(y) = y$ . For example, the vertices of the hexagons are fixed by the 120 degree rotations about these points, and the midpoints of edges are fixed by 180 degree rotations. An action without fixed points is called a **free** action. Thus for a free action of  $G$  on  $Y$ , only the identity element of  $G$  fixes any point of  $Y$ . This is equivalent to requiring that all the images  $g(y)$  of each  $y \in Y$  are distinct, or in other words  $g_1(y) = g_2(y)$  only when  $g_1 = g_2$ , since  $g_1(y) = g_2(y)$  is equivalent to  $g_1^{-1}g_2(y) = y$ . Though condition  $(*)$  implies freeness, the converse is not always true. An example is the action of  $\mathbb{Z}$  on  $S^1$  in which a generator of  $\mathbb{Z}$  acts by rotation through an angle  $\alpha$  that is an irrational multiple of  $2\pi$ . In this case each orbit  $\mathbb{Z}y$  is dense in  $S^1$ , so condition  $(*)$  cannot hold since it implies that orbits are discrete subspaces. An exercise at the end of the section is to show that for actions on Hausdorff spaces, freeness plus proper discontinuity implies condition  $(*)$ . Note that proper discontinuity is automatic for actions by a finite group.

**Example 1.41.** Let  $Y$  be the closed orientable surface of genus 11, an ‘11-hole torus’ as shown in the figure. This has a 5-fold rotational symmetry, generated by a rotation of angle  $2\pi/5$ . Thus we have the cyclic group  $\mathbb{Z}_5$  acting on  $Y$ , and the condition  $(*)$  is obviously satisfied. The quotient space  $Y/\mathbb{Z}_5$  is a surface of genus 3, obtained from one of the five subsurfaces of  $Y$  cut off by the circles  $C_1, \dots, C_5$  by identifying its two boundary circles  $C_i$  and  $C_{i+1}$  to form the circle  $C$  as shown. Thus we have a covering space  $M_{11} \rightarrow M_3$  where  $M_g$  denotes the closed orientable surface of genus  $g$ . In particular, we see that  $\pi_1(M_3)$  contains the ‘larger’ group  $\pi_1(M_{11})$  as a normal subgroup of index 5, with quotient  $\mathbb{Z}_5$ . This example obviously generalizes by replacing the two holes in each ‘arm’ of  $M_{11}$  by  $m$  holes and the 5-fold symmetry by  $n$ -fold symmetry. This gives a covering space  $M_{mn+1} \rightarrow M_{m+1}$ . An exercise in §2.2 is to show by an Euler characteristic argument that if there is a covering space  $M_g \rightarrow M_h$  then  $g = mn + 1$  and  $h = m + 1$  for some  $m$  and  $n$ .



As a special case of the final statement of the preceding proposition we see that for a covering space action of a group  $G$  on a simply-connected locally path-connected space  $Y$ , the orbit space  $Y/G$  has fundamental group isomorphic to  $G$ . Under this isomorphism an element  $g \in G$  corresponds to a loop in  $Y/G$  that is the projection of

## Aufgabe 60

Sei  $G = \{g_0 = 1, g_1, \dots, g_n\}$  eine endliche Gruppe, die stetig und frei auf  $X$  (top. Raum) wirkt.  $X$  sei Hausdorff. Frei bedeutet dass  $x \neq gx$  für alle  $x \in X$  und  $g \neq 1$ . Daraus folgt  $g_i x \neq g_j x$  für  $i \neq j$ : Denn ansonsten wäre  $g_i x = g_j x$ , also  $x = g_i^{-1} g_j x$ , also  $g_i^{-1} g_j = 1$ , also  $g_i = g_j$ .

Sei  $x \in X$ . Aus der Hausdorff-Eigenschaft folgt (hier ist Endlichkeit wichtig), dass Umgebungen  $U_i \ni g_i x$  existieren, die paarw. disjunkt sind. Insbesondere ist  $U_0 \ni x$  und  $U_0 \cap gU_0 = \emptyset$  für alle  $1 \neq g$ , also ist die Wirkung eigentlich diskontinuierlich. Es folgt, dass die Projektion  $p : X \rightarrow X/G$  eine Überlagerung mit  $n + 1$  Blättern ist.

## Aufgabe 61

Sei  $X$  wegzsh. und lokal-wegzsh. mit endlicher Fundamentalgruppe. Sei  $f : X \rightarrow S^1$  stetig. Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$  hat keine nicht-trivialen endlichen Untergruppen. Daher gilt  $f_*(\pi_1(X)) = \{0\} \subseteq \pi_1(S^1)$ . Nach dem Liftungstheorem folgt, dass  $f$  einen Lift bzgl. der universellen Überlagerung  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$  von  $S^1$  besitzt, d.h. es existiert eine stetige Abb.  $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f = p \circ \tilde{f}$ . Der Raum  $\mathbb{R}$  ist aber kontrahierbar, also existiert eine Homotopie  $\tilde{F}_t : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\tilde{F}_1 = \tilde{f}$  und  $\tilde{F}_0 = 0$ . Es folgt, dass  $F_t := p \circ \tilde{F}_t$  eine Homotopie zwischen der konstanten Abb. und  $f$  ist.

## Aufgabe 62

Sei  $G$  wegzsh. und lokal-wegzsh. topologische Gruppe und  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  die universelle Überlagerung. Es folgt dass  $\pi_1(\tilde{G})$  sowie  $\pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G})$  trivial sind. Sei  $e \in G$  das neutrale Element. und sei  $\tilde{e} \in p^{-1}(e)$  fixiert.

Sei  $\mu : \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  der Lift der Abbildung  $\tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G$  def. durch  $(\tilde{x}, \tilde{y}) \mapsto p(\tilde{x}) \cdot p(\tilde{y})$  mit  $\mu(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$ . Dieser existiert nach Liftungstheorem. Behauptung:  $(\tilde{G}, \mu)$  ist eine topologische Gruppe.

Die beiden Abb.  $\tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ ,  $\tilde{x} \mapsto \mu(\tilde{x}, \tilde{e})$  sowie  $\tilde{x} \mapsto \tilde{x}$  sind gleich im Punkt  $\tilde{x} = \tilde{e}$  und sind Lifts der gleichen Abbildung  $p : \tilde{G} \rightarrow G$ . Es folgt  $\mu(\tilde{x}, \tilde{e}) = \tilde{x}$ . Analog auch  $\mu(\tilde{e}, \tilde{x}) = \tilde{x}$ , d.h.  $\tilde{e}$  ist neutrales Element bzgl.  $\mu$ .

Die beiden Abb.  $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ ,  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto \mu(\mu(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{z})$  und  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \mapsto \mu(\tilde{x}, \mu(\tilde{y}, \tilde{z}))$  sind gleich am Punkt  $(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e})$  und Lifts der gleichen Abb., daher gleich, also ist  $\mu$  assoziativ.

Sei  $\lambda : \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$  Lift der Abb.  $\tilde{G} \rightarrow G$ ,  $\tilde{x} \mapsto p(\tilde{x})^{-1}$  mit  $\lambda(\tilde{e}) = \tilde{e}$ . Es gilt  $p(\mu(\lambda(\tilde{x}), \tilde{x})) = p(\tilde{x})^{-1} \cdot p(\tilde{x}) = e$  Also gilt  $\mu(\lambda(\tilde{x}), \tilde{x}) \in p^{-1}(e)$ . Letzteres ist eine diskrete Teilmenge von  $\tilde{G}$ , also ist  $\mu(\lambda(\tilde{x}), \tilde{x})$  konstant. Es folgt  $\mu(\lambda(\tilde{x}), \tilde{x}) = \tilde{e}$  und analog für rechtsinvers.

Damit ist  $\tilde{G}$  eine Gruppe. Nach Konstruktion ist klar, dass  $\tilde{G}$  eine top. Gruppe ist, und dass  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  Gruppenhomomorphismus.

Noch zu zeigen:  $\ker(p)$  ist im Zentrum von  $\tilde{G}$  enthalten. Schreibe  $\tilde{x}\tilde{y} := \mu(\tilde{x}, \tilde{y})$ .  $\ker(p)$  ist eine diskrete (Überlagerung) und normale (Homomorphismus) Untergruppe von  $\tilde{G}$ . Für jedes  $\tilde{x} \in \ker(p)$  und  $\tilde{g} \in \tilde{G}$  gilt damit  $\tilde{g}\tilde{x}\tilde{g}^{-1} \in \ker(p)$  wegen normal. Weil  $\ker(p)$  diskret, ist  $\tilde{g}\tilde{x}\tilde{g}^{-1}$  für  $\tilde{x} \in \ker(p)$  fest konstant, also gilt  $\tilde{g}\tilde{x}\tilde{g}^{-1} = \tilde{x}$ , damit ist  $\tilde{x}$  im Zentrum von  $\tilde{G}$  enthalten.

### Aufgabe 63

$SL(2, \mathbb{R})$  ist die Menge aller reellen  $2 \times 2$ -Matrizen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  (äquivalent: aller Vektoren  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ ) mit  $\det = ad - bc = 1$ . Durch Einführung neuer Koordinaten  $x, y, z, w$  lässt sich diese Bedingung äquivalent schreiben als

$$x^2 - z^2 + y^2 - w^2 = 1 \quad \iff \quad x^2 + y^2 = 1 + z^2 + w^2$$

Genauer: Durch Hauptachsentransformation lässt sich die durch  $ad - bc$  bestimmte Quadrik auf Normalform bringen. Konkret besteht sie aus zwei Blöcken  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  bzgl. Koordinaten  $a$  und  $d$  bzw. bzgl.  $b$  und  $c$  und wird auf  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  transformiert, nun bzgl. koordinaten  $x$  und  $z$  bzw.  $y$  und  $w$ .

Bei festem  $z$  und  $w$  lässt sich die Gleichung aber explizit lösen. Alle Lsg. haben die Form

$$x = \sqrt{z^2 + w^2 + 1} \cos(\varphi), \quad y = \sqrt{z^2 + w^2 + 1} \sin(\varphi)$$

für  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Damit ist ein Homöomorphismus  $SL(2, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^2 \times S^1$  hergestellt. Es folgt nun unmittelbar, dass

$$\pi_1(SL(2, \mathbb{R})) = \mathbb{Z}$$

### Aufgabe 63 zweiter Teil

Es ist klar, dass  $G = SL(2, \mathbb{R})$  eine topologische Gruppe ist. Aus dem ersten Teil folgt wegzsh. und lokal-wegzsh. Es folgt, dass die universelle Überlagerung  $\overline{G}$  ebenfalls eine topologische Gruppe ist. Die Überlagerung ist unendlich, denn die Gruppe der Deckabb. operiert auf  $\overline{G}$  eigentlich-diskontinuierlich, die Blätterzahl der Überlagerung stimmt also mit ihrer Mächtigkeit überein, andererseits ist die Gruppe der Deckabb. isomorph zu  $\pi_1(G) = \mathbb{Z}$  (wegen univ. Überlagerung).

Zu zeigen ist, dass  $\overline{G}$  keine treue, endlichdim. Darstellung besitzt, d.h. es gibt keinen injektiven Morphismus topologischer Gruppen  $\overline{G} \rightarrow GL(N, \mathbb{R})$ . In diesem Sinne ist  $\overline{G}$  also keine Matrixgruppe.

Zum Beweis brauchen wir ein bisschen Lie-Gruppen-Theorie. Literatur: Diverse Bücher und Skripte, z.B. Varadarajan, "Lie Groups, Lie Algebras...". Zunächst:

**Definition 0.1.** *Eine Lie-Gruppe ist eine topologische Gruppe, die zusätzlich eine glatte Mannigf. ist, so dass die Gruppen-Abb. glatt sind.*

*Morphismen zwischen Lie-Gruppen sind Morphismen top. Gruppen, die zusätzlich glatt sind.*

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe, und sei  $\mathfrak{g} := T_1G$  der Tangentialraum an das neutrale Element  $1 \in G$ .  $\mathfrak{g}$  trägt kanonisch eine schief-symm. Abb. (Lie-Klammer)  $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{g}} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , die noch die sog. Jacobi-Identität erfüllt. Ein Vektorraum mit einer solchen Abb. heisst Lie-Algebra. Jeder Lie-Gruppe  $G$  ist also kanonisch eine Lie-Algebra  $\mathfrak{g}$  zugeordnet. Jeder Lie-Gruppen-Morphismus  $f : G \rightarrow H$  induziert einen Lie-Algebren-Morphismus  $f_* := df_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  (der die Lie-Klammer erhält).



Zur Aufgabe:  $G = SL(2, \mathbb{R})$  ist eine Lie-Gruppe. Glattheit ist eine lokale Eigenschaft, also ist  $\overline{G}$  auch eine Lie-Gruppe. Eine Umgebung von  $1 \in \overline{G}$  ist diffeomorph zu einer Umg. von  $1 \in G$ , also ist die Lie-Algebra von  $\overline{G}$  dieselbe wie von  $G$ , also  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ .

Sei nun  $r : \overline{G} \rightarrow GL(N, \mathbb{R})$  ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, und  $r_* : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{R})$  die induzierte Lie-Alg.-Abb. Wir definieren die Abbildung

$$f : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}), \quad f(A + iB) := r_*(A) + i \cdot r_*(B)$$

Man zeigt, dass  $f$  die Lie-Klammer erhält, und daher ein Lie-Alg-Morphismus ist. Ein Morphismus von Lie-Gruppen induziert einen von Lie-Algebren. Es gilt folgende Umkehrung:

**Theorem 0.2.** *Seien  $G_i$  zusammenhängende Lie-Gruppen mit Lie-Algebren  $\mathfrak{g}_i$ . Sei  $f : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  ein Morphismus von Lie-Algebren. Es gibt höchstens einen Lie-Gruppen-Morphismus  $F : G_1 \rightarrow G_2$ , so dass  $f = F_*$ . Wenn  $G_1$  einfach-zsh. ist, gibt es genau einen solchen (insb. gibt es einen).*

$SL(2, \mathbb{C})$  ist einfach-zsh., wie man zeigen kann (deswegen betrachten wir es ja auch hier!). Unser  $f$  induziert also einen Lie-Gruppen-Morphismus  $F : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ . Betrachte nun folgende Verkettungen von Abbildungen:

$$\overline{G} \xrightarrow{r} GL(N, \mathbb{R}) \rightarrow GL(N, \mathbb{C}), \quad \overline{G} \xrightarrow{p} G = SL(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \xrightarrow{F} GL(N, \mathbb{C})$$

Nenne die erste Abbildung  $L : \overline{G} \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$  und die zweite  $M : \overline{G} \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$ . Nach Konstruktion gilt  $L_* = M_*$ , und mit dem obigen Satz folgt  $L = M$ . Die Inklusion  $GL(N, \mathbb{R}) \rightarrow GL(N, \mathbb{C})$  ist injektiv. Wäre  $r$  injektiv, so wäre auch  $L$  injektiv. Dies kann aber nicht sein, weil es  $M$  nicht ist (denn die Projektion  $p$  ist nicht wie oben gezeigt).

Wir haben also gezeigt, dass es keinen injektiven Morphismus von Lie-Gruppen  $\overline{G} \rightarrow GL(N, \mathbb{R})$  gibt. Vielleicht gibt es aber doch einen injektiven Morphismus von topologischen Gruppen (der also nicht glatt zu sein braucht)?

**Theorem 0.3.** *Seien  $G_i$  Lie-Gruppen und  $f : G_1 \rightarrow G_2$  ein stetiger Gruppenhomom. Dann ist  $f$  glatt.*

Stetigkeit impliziert hier also Glattheit! Einen inj. Morphismus von top. Gruppen kann es hier also auch nicht geben, denn dieser wäre glatt, und wir haben schon gezeigt, dass es einen letzteren nicht gibt.