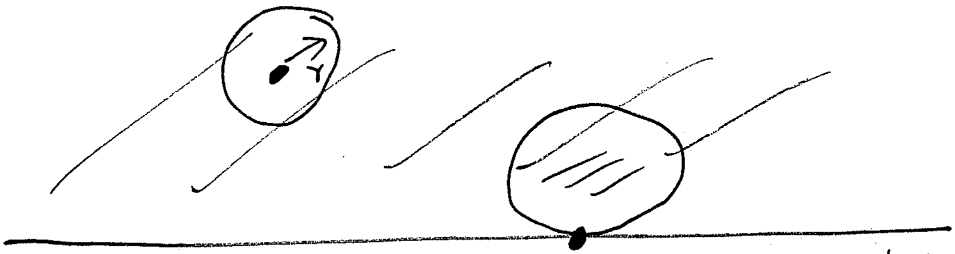
Niemycki - Ebene.

$$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y \geq 0 \}$$

$$X_1 = \{ (x,0) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in \mathbb{R}^1 \}.$$

Topologie: Umgebungsbasis



0. Eigenschaft: $\mathcal{O}(\text{Eukl.}) \subset \mathcal{O}(\text{Niemycki})$, d.h. die Niemycki-Ebene hat mehr offene Mengen.

1. Eigenschaft: $X \setminus X_1$ ist eine offene Teilmenge.

2. Eigenschaft: Jede Teilmenge $A \subset X_1$ ist abgeschlossen.

3. Eigenschaft: Die Punkte $(w_1, w_2) \in X$ mit w_i rational sind dicht.

Beweis: Sei $A = \{ (w_1, w_2) \in X : w_i \text{ rat.} \}$ und betrachte $X \setminus \bar{A}$. Ist $(x,y) \in X \setminus \bar{A}$ so gibt es 2 Fälle:

1. Fall: $y > 0$. Weil $X \setminus \bar{A}$ offen ist, ex.

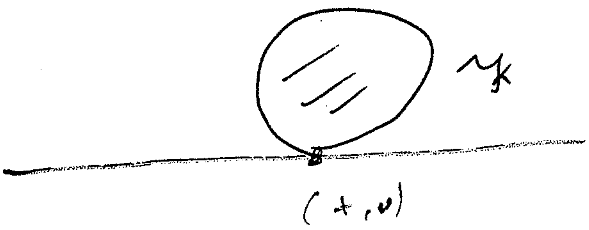
also ein kleine Kugel

$$\mathcal{K}((x,y),\varepsilon) \subset X \setminus \bar{A}$$

Aber $\mathcal{K}((x,y),\varepsilon)$ enthält rationale Punkte, ein Widerspruch zu $\mathcal{K}((x,y),\varepsilon) \cap A = \emptyset$.

2. Fall: $y=0$. Dann ex. ein tangentiale Kreis

$\mathcal{K}$



weil $\mathcal{K} \subset X \setminus \bar{A}$. Aber $\mathcal{K}$ enthält erneut rationale Punkte.

$$\Rightarrow X \setminus \bar{A} = \emptyset \Rightarrow \bar{A} = X \text{ ist erfüllt.}$$

4. Eigenschaft: X ist kein T_4-Raum

Beweis: siehe Vorlesung. Dies folgt aus Eigenschaft 2.

5. Eigenschaft: X ist ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum

Beweis: In der Vorlesung wurden stetige Funktionen angegeben, welche Punkte von abg. Mengen trennen.

6. Eigenschaft: X hat keine abzählbare Basis, d.h. X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom nicht.

Beweis: $X \in T_3$. Aus 2. Abzählbarkeitsaxiom würde dann $X \in T_4$ folgen. Widerspruch zu Eigenschaft 4.)

7. Eigenschaft: Niemytzki-Ebene ist ein Beispiel dafür, dass die Umgekehrte

$$\left\{\begin{array}{l}\text{es ex. abzählbare} \\ \text{dichte Teilmenge}\end{array}\right\} \not\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}X \text{ erfüllt zweite} \\ \text{Abzählbarkeitsax.}\end{array}\right\}$$

nicht gilt.

Nach Eigenschaft 3 hat die Niemytzki-Ebene eine abzählbare dichte Teilmenge, erfüllt aber das 2. Abzählbarkeitsaxiom nicht.

8. Eigenschaft: Niemytzki-Ebene ist nicht homöomorph zu $(\mathbb{R}^2, \text{Pfeil})$.

Beweis: $(\mathbb{R}^2, \text{Pfeil}) \in T_4$

Niemytzki $\notin T_4$ $\square$

9. Eigenschaft: Es existiert ein normaler Raum $Y = X \cup \{\Omega\}$. Dafür folgt

a) $Y \in T_4$

b) Der Teilraum $X \subset Y$ ist $X \notin T_4$.

Konstruktion von Y:

$Y = X \cup \{\Omega\}$ als Menge.

Umgebungsbasis von Ω:

$$\{\Omega\} \cup U \quad \text{mit} \quad U \subset X \text{ offen}$$

und U enthält alle Punkte aus $X_1 \subseteq X$ mit Ausnahme endlich vieler.

Konsequenz: Ist $A \subset Y$ abgeschlossen und $\Omega \notin A$, so ist $A \cap X_1$ endlich

Beweis: $\Omega \in Y \setminus A$ und $Y \setminus A$ ist offen.

$\Rightarrow$ es existiert

$$\Omega \in \{\Omega\} \cup U \subset Y \setminus A$$

und $U \subset X$ und U enthält alle Punkte aus X_1 mit Ausnahme endlich vieler $\Rightarrow$

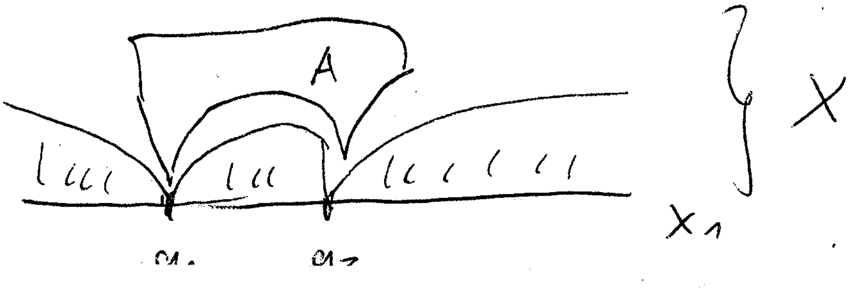
$$A \cap X_1 \text{ ist endlich.}$$

Weiterhin $Y \setminus A \subset Y$ offen in Y

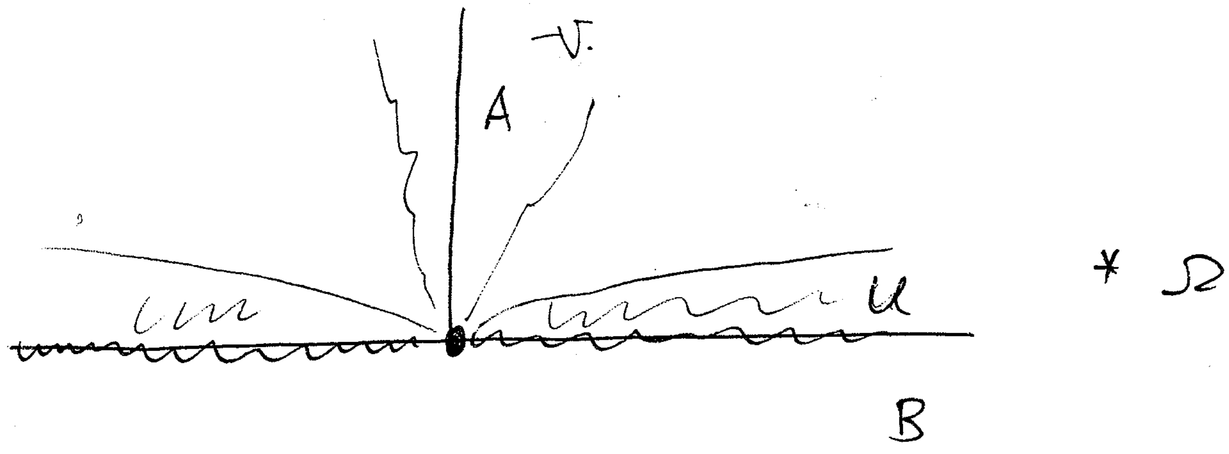
$$X \setminus A = (Y \setminus A) \cap (Y \setminus \{\Omega\}) \subset Y \text{ offen in } Y$$

Also ist $X \setminus A \subset X$ offen in X

d.h. $A \subset X$ abgeschl.



$\Rightarrow$ weil ist $A \subset X$ in der Canl. Topologie abgeschlossen.


V.
A
U
B
* Ω