Pfeil - Topologie.

$X = \mathbb{R}^1$

- Die Intervalle $[x, w)$ mit $x \in \mathbb{R}^1$ reell und $w \in \mathbb{Q}$ sind eine Basis
- B 1. und B. 2. sind erfüllt. - trivial

1. Eigenschaft: Alle Mengen $[x, y)$, wobei $x, y \in \mathbb{R}^1$ beliebig reell sind, sind offen und abgeschlossen.

Beweis: Seien $w_n \to y$, $w_n \in \mathbb{Q}$. Dann gilt

$$[x, y) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{[x, w_n)}_{\text{offen in Pfeil-Topologie.}}$$

Weil sind alle $[x, y)$ offen. Aber

$$\mathbb{R}^1 \setminus [x, y) = \underbrace{(-\infty, x)}_{\text{offen.}} \,\dot{\cup}\, \underbrace{[y, \infty)}_{\text{offen.}}$$

also ist $[x, y)$ auch abgeschl.

2. Eigenschaft: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^1$ ist dicht in Pfeil-Topologie

Beweis: Betrachte $\mathbb{R}^1 \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. dies ist offen. Wäre $x_0 \in \mathbb{R}^1 \setminus \mathbb{Q}$, so existiert $x_0 \in [x, w) \subset \mathbb{R}^1 \setminus \overline{\mathbb{Q}}$. Aber $[x, w)$ enthält rationale Zahlen, Widerspruch $\Rightarrow \mathbb{R}^1 \setminus \overline{\mathbb{Q}} = \phi$, d.h. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^1$

3. Eigenschaft: Alle Mengen $[x,y)$ sind offen und abgeschlossen. Denn ist die Funktion

$$f(z) = \begin{cases} 0 & x \leq z < y \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine stetige Funktion $f : (\mathbb{R}^1, \text{Pfeil}) \to (\mathbb{R}^1, \text{standard})$.

4. Eigenschaft: $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ ist ein $T_{3\frac{1}{2}}$-Raum.

Sei $F \subset \mathbb{R}^1$ abgeschlossen und $x_0 \notin F$.

Dann existiert eine offene Menge

$$x_0 \in [x, w) \subset \mathbb{R}^1 \setminus F.$$

Betrachte die obige stetige Funktion von $[x,w)$

$$f : (\mathbb{R}^1, \text{Pfeil}) \to [0,1]$$

Dann gilt $f(x_0) = 0$

$$f|_F \equiv 1. \quad \blacksquare$$

5. Eigenschaft: $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ ist ein J_4-Raum.

$A_1 = \bar{A}_1$, $A_2 = \bar{A}_2$ seien zwei abg. Teilmg.

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

Bilde

$$F_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^1 \setminus A_i : x \text{ ist in keinem offenen Intervall welches in } \mathbb{R}^1 \setminus A_i \text{ liegt} \right\}$$

Weil $\mathbb{R}^1 \setminus A_i$ offen in $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ ist, folgt:

Gilt $x_0 \in F_i$, so existiert ein halboffenes Intervall $[x_0, y) \subset \mathbb{R}^1 \setminus A_i$,

und alle Punkte $z \in (x_0, y)$ liegen nicht in F_i. Daher ist F_i abzählbar !!

Wir bilden jetzt die Menge

$$F = F_1 \cup F_2.$$

und führen eine neue Topologie in $\mathbb{R}^1$ ein: Θ_1

Die Basis sei

$(w_1, w_2) \in \mathbb{Q}$, $w_1, w_2 \in \mathbb{Q}$

$[x, w)$ mit $x \in F$, $w \in \mathbb{Q}$

Weil F abzählbar ist, ist $(\mathbb{R}^1, \mathcal{O}_1)$ ein top. Raum mit abzählbarer Basis.

Weiterhin ist $(\mathbb{R}^1, \mathcal{O}_1)$ ein T_3-Raum (leicht zu zeigen). Daraus folgt

$$(\mathbb{R}^1, \mathcal{O}_1) \text{ ist ein } T_4\text{-Raum.}$$

Aber A_1, A_2 sind auch abgeschlossen in $(\mathbb{R}^1, \mathcal{O}_1)$. Weil

$$(\mathbb{R}^1, \mathcal{O}_1) \xleftrightarrow{\text{id.}} (\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$$

stetig ist $(\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}(\text{Pfeil})!!)$ können A_1, A_2 zunächst in $(\mathbb{R}^1, \mathcal{O}_1)$ offen getrennt werden und dann in $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ offen getrennt werden.

$\square$

6. Eigenschaft: $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ hat keine abzählbare Basis der Topologie.

Sei $\mathfrak{V} = \{V_1, V_2, \dots\}$ ein beliebiges abzählbares System offener Mengen in $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$. Sei

$$V_i = [x_i, w_i).$$

Dann ist $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ abzählbar und es existiert

$$x^* \in \mathbb{R}^1 \setminus \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$$

Denn ist $[x^*, x^*+1)$ offen in $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$

Weil $V_1, V_2 \dots$ eine Basis sein soll, so existiert Teilfolge mit

$$[x^*, x^*+1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} [x_{i_k}, w_{i_k})$$

Denn also folgt $x^* \in [x_{i_k}, w_{i_k})$ für mindestens ein k. Wegen

$$[x_{i_k}, w_{i_k}) \subset [x^*, x^*+1)$$

und $x^* \in [x_{i_k}, w_{i_k})$ folgt

$x^* = x_{i_k}$, ein Widerspruch zu $x^* \in \mathbb{R}^1 \setminus \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$

Damit ist gezeigt: Aus der Basis der Topologie von $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ kann keine abzählbare Teilbasis gewählt werden. □

7. Eigenschaft: $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ ist kein metrischer Raum.

Beweis: • $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}^1$, d.h. $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ hat eine abzählbare dichte Teilmenge.

• $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ hat keine abzählbare Basis.

$\rightarrow$ $(\mathbb{R}^1, \text{Pfeil})$ nicht metrisch. □