Automorphe Formen und Riemannsche Flächen
Sommersemester 2013
Prof. Dr. Thomas Friedrich, Dr. Josua Groeger
11.04.2013

Übungsblatt 1 - Präsenzaufgaben

Bezeichnungen

In diesen Übungen werden immer folgende Bezeichnungen verwendet.

- $\mathcal{K}(z,r)$ ist der Kreis mit Mittelpunkt $z \in \mathbb{C}$ und Radius $r \geq 0$ in der komplexen Ebene;
- Zu drei gegebenen Punkten A, B und C in der komplexen Ebene ist mit $\angle(A; B, C)$ der orientierte Winkel mit Spitze A von B nach C gemeint;
- Das Argument θ einer komplexen Zahl $z = \varrho\, e^{i\theta}$ schreiben wir $\arg(z)$.

Aufgabe 1

Sei f die komplexe Abbildung $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := \frac{z-1}{z-i}$. Man bestimme den geometrischen Ort aller Punkte, für die f rein reell- bzw. komplexwertig ist, sowie die Fixpunkte von f. Verändert sich das Ergebnis qualitativ für eine allgemeine Abbildung $f(z) := \frac{z-a}{z-b}$, $a, b \in \mathbb{C}$?

Aufgabe 2

Die Kreise $\mathcal{K}(0,1)$ und $\mathcal{K}(z_0,r)$ schneiden sich genau dann orthogonal, wenn $|z_0|^2 = 1+r^2$ gilt.

Aufgabe 3 (Spiegelung am Kreis)

(a) Zwei Punkte z, $z' \in \mathbb{C}$ heißen *Spiegelbilder* oder *symmetrisch* am Kreis $\mathcal{K}(a,r)$, wenn $\arg(z'-a) = \arg(z-a)$ und $|z'-a| \cdot |z-a| = r^2$ gilt. Man überlege sich eine einzige Gleichung zwischen z und z', die diese Bedingung wiedergibt und zeige, dass jeder Kreis durch zwei bzgl. des Kreises $\mathcal{K}(a,r)$ symmetrische Punkte diesen orthogonal schneidet.

(b) Jeder Kreis orthogonal zu $\mathcal{K}(0,1)$ geht bei Spiegelung an $\mathcal{K}(0,1)$ in sich selbst über.

(c) Die Komposition $s_2 \circ s_1$ der Spiegelungen s_1 und s_2 an zwei beliebigen Kreisen $\mathcal{K}(a_1,r_1)$ und $\mathcal{K}(a_2,r_2)$ ist eine gebrochen lineare Funktion.

Aufgabe 4 (elementargeometrisch zu beweisen)

Sind $A \neq B$ zwei Punkte eines Kreises $\mathcal{K}$ mit Mittelpunkt O, so gilt

(a) für jeden von A und B verschiedenen Punkt M auf $\mathcal{K}$: $\angle(O; A, B) = 2\angle(M; A, B)$;
(b) für jedes von A und B verschiedene Punktepaar M, N auf $\mathcal{K}$:
$\angle(M; A, B) = \angle(N; A, B)$ für M und N auf der gleichen Seite der Geraden (AB), und
$\angle(M; A, B) = \angle(N; A, B) + \pi$ für M und N auf verschieden Seiten der Geraden (AB).

(bitte wenden)

Übungsblatt 1 - Hausaufgaben

Aufgabe 5 (elementargeometrisch zu beweisen)

Vier verschiedene Punkte A, B, C, D der Ebene liegen genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden, wenn $\angle(C; A, B) = \angle(D; A, B) \quad (\pi)$ gilt.

Aufgabe 6 (Doppelverhältnis I)

Werden die drei Punkte A, B, M der Ebene dargestellt durch die komplexen Zahlen a, b, m, so gilt:

$$\arg\left(\frac{m-b}{m-a}\right) \;=\; \angle(M; A, B)\,.$$

Man folgere hieraus, dass vier Punkte A, B, C, D, dargestellt durch $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, genau dann auf einem Kreis oder einer Geraden liegen, wenn das Doppelverhältnis

$$(a:b\,;c:d) \;:=\; \frac{d-a}{d-b} : \frac{c-a}{c-b}$$

reell ist.

Aufgabe 7 (Doppelverhältnis II)

Man zeige, dass die allgemeine gebrochen lineare Transformation $z \mapsto f(z) = w$, die drei verschiedene vorgegebene Punkte z_1, z_2, z_3 auf drei verschiedene vorgegebene Bildpunkte w_1, w_2, w_3 abbildet, eindeutig durch

$$(w_1 : w_2\,; w_3 : w) \;=\; (z_1 : z_2\,; z_3 : z)$$

bestimmt ist. Wie ist dies zu interpretieren, wenn einer der Punkte der unendlich ferne Punkt ist ? Man bestimme diejenige gebrochen lineare Abbildung f, die 0 auf i, i auf ∞ und 1 auf sich selbst abbildet, und bestimme das Bild des Einheitskreises sowie von dessen Innerem unter dieser Abbildung.