Übungsblatt 10

Aufgabe 36 (1-Formen auf Flächen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$)

Sei $Q(w_0, w_1, w_2)$ ein homogenes Polynom vom Grad d so dass $dQ \neq 0$. Bekanntlich trägt dann die Menge $M_Q^2 := \{[w_0 : w_1 : w_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid Q(w_0, w_1, w_2) = 0\}$ die Struktur einer kompakten Riemannschen Fläche. Definiert man das Polynom $f(z_1, z_2) := Q(1, z_1, z_2)$, so ist $M_Q^2 \cap \mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid f(z_1, z_2) = 0\}$ ebenfalls eine (nicht-kompakte) Riemannsche Fläche. Letztere besitzt dz_1 und dz_2 als holomorphe 1-Formen, die sich aber i.A. nicht auf M_Q^2 fortsetzen lassen.

(a) Sei $g(z_1, z_2)$ eine holomorphe Funktion. Zeige dass durch

$$\omega_g := g(z_1, z_2)\frac{dz_1}{\partial f/\partial z_2} = -g(z_1, z_2)\frac{dz_2}{\partial f/\partial z_1}$$

eine holomorphe 1-Form auf $M_Q^2 \cap \mathbb{C}^2$ definiert wird.

(b) Sei nun g ein Polynom vom Grad k. Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung, dass sich ω_g zu einer holomorphen 1-Form auf M_Q^2 fortsetzen lässt.

(c) Folgere, dass der Raum der holomorphen 1-Formen auf M_Q^2 mindestens die Dimension $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)$ hat.

Aufgabe 37 (Exakte Garbensequenzen)

Sei X ein topologischer Raum (z.B. eine Riemannsche Fläche). Eine Folge von Garbenmorphismen $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ heißt exakt (bei $\mathcal{G}$) falls für jeden Punkt $x_0 \in X$ die induzierte Folge $\mathcal{F}_{x_0} \xrightarrow{\alpha_{x_0}} \mathcal{G}_{x_0} \xrightarrow{\beta_{x_0}} \mathcal{H}_{x_0}$ der Halme exakt ist, d.h. wenn gilt $\ker \beta_{x_0} = \operatorname{im} \alpha_{x_0}$.

Im Folgenden sei $0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to 0$ eine exakte Garbensequenz und $U \subseteq X$ offen.

(a) Zeige dass

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{H}(U)$$

ebenfalls exakt ist.

(b) Gilt auch Exaktheit von $\mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0$, d.h. ist $\beta(U)$ surjektiv?
<u>Hinweis:</u> Betrachte die Garben $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}^*$ sowie die Exponentialabbildung.

(c) Konstruiere einen Homomorphismus $\delta : H^0(X, \mathcal{H}) \to H^1(X, \mathcal{F})$ so dass die induzierte Folge

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_*} H^0(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_*} H^0(X,\mathcal{H}) \xrightarrow{\delta}$$
$$\xrightarrow{\delta} H^1(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_*} H^1(X,\mathcal{G}) \xrightarrow{\beta_*} H^1(X,\mathcal{H})$$

der Kohomologiegruppen exakt ist.
<u>Bemerkung:</u> Analog konstruiert man Homomorphismen $\delta : H^n(X, \mathcal{H}) \to H^{n+1}(X, \mathcal{F})$.

(bitte wenden)

Aufgabe 38 (Dolbeault-Lemma)

Auf einer Riemannschen Fläche M sei $\mathcal{E}$ die Garbe der glatten Funktionen und $\mathcal{E}^{0,1}$ die der glatten $(0,1)$-Formen.

(a) Sei $g \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ eine Funktion mit kompaktem Träger. Zeige dass

$$f(\zeta) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(z)}{z-\zeta}\, dz \wedge d\overline{z}$$

eine Funktion $f \in \mathcal{E}(\mathbb{C})$ definiert, die die Differentialgleichung $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$ löst.

(b) Sei $X := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ mit $0 < R \leq \infty$ und $g \in \mathcal{E}(X)$. Konstruiere eine Funktion $f \in \mathcal{E}(X)$ so dass auch hier $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = g$ gilt.
<u>Hinweis:</u> Schöpfe X durch eine Folge von Kreisen X_n vom Radius R_n aus mit $R_n \to R$ und wende Teil (a) auf Funktionen $\psi_n \cdot g$ an, wobei ψ_n kompakten Träger in X_{n+1} haben und identisch 1 auf X_n sind.

(c) Folgere dass die Garbensequenz $0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{E} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{E}^{0,1} \longrightarrow 0$ exakt ist und zeige

$$H^1(M, \mathcal{O}) = \mathcal{E}^{0,1}(M)/\overline{\partial}(\mathcal{E}(M))$$

<u>Bemerkung:</u> Bekanntlich ist die rechte Seite isomorph zum Dualraum des Raumes $\Omega(M)$ aller holomorphen 1-Formen auf M.