Übungsblatt 11

Aufgabe 39 (Klassifikation von Flächen mit Geschlecht $g = 1$)

Sei M^2 eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g = 1$ und $x_0 \in M^2$ ein fixierter Punkt.

(a) Zeige, dass M^2 (bis auf konstante Vielfache) genau eine holomorphe 1-Form ω besitzt, und dass diese nirgends verschwindet.

(b) Beweise, dass auf M^2 meromorphe Funktionen $F, F^* : M^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ existieren, die in einer Umgebung von x_0 die Gestalt

$$F(z) = \frac{1}{z^2} + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots , \qquad F^*(z) = \frac{1}{z^3} + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$$

besitzen.
Hinweis: Benutze Riemann-Roch sowie Teil (a) für F und konstruiere anschließend F^* mit Hilfe von F und ω.

(c) Betrachte die durch $\Phi(x) := [1 : F(x) : F^*(x)]$ definierte Abbildung $\Phi : M^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Finde ein homogenes Polynom $Q(z_0, z_1, z_2)$ vom Grad 3, so dass das Bild unter Φ in der Riemannschen Fläche $M^2_Q := \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid Q(z_0, z_1, z_2) = 0\}$ liegt. Zeige, dass die so definierte Abbildung $M^2 \to M^2_Q$ biholomorph ist.
Hinweis: Konstruiere zunächst mit Hilfe von Potenzen von F und F^* eine Funktion, die einen einfachen Pol in x_0 hat.

(d) Bringe Q durch lineare Koordinatentransformation in die Standardform $\tilde{Q}(z_0, z_1, z_2) = z_0 z_2^2 - 4z_1^3 - g_2 z_0^2 z_1 - g_3 z_0^3$ und folgere dass ein Gitter L existiert, so dass $M^2 \cong \mathbb{C}/L$.

Aufgabe 40 (Flächen von höherem Geschlecht)

Sei M^2 eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$. M^2 heißt hyperelliptisch, falls eine meromorphe Funktion $f : M^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ mit genau zwei Polen existiert (die auch zusammenfallen können).

(a) Sei $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ eine Basis im Raum aller holomorphen 1-Formen. Zeige, dass durch $\Phi(x) := [\omega_1(x) : \omega_2(x) : \ldots : \omega_g(x)]$ eine Abbildung $\Phi : M^2 \to \mathbb{P}^{g-1}(\mathbb{C})$ definiert wird.
Hinweis: Zu zeigen ist also, dass die ω_i in keinem Punkt x_0 alle gleichzeitig verschwinden. Konstruiere dafür einen geeigneten Divisor und benutze Riemann-Roch.

(b) Beweise dass die Abbildung Φ im nicht-hyperelliptischen Fall injektiv ist.

(c) Zeige: Jede kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $g \leq 2$ ist hyperelliptisch.

(d) Zeige, dass jede hyperelliptische kompakte Riemannsche Fläche biholomorph zur Riemannschen Fläche $M_{p,2}$ einer Quadratwurzel $\sqrt{p(z)}$ ist.
Hinweis: Der Abbildungsgrad von $f : M^2 \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ ist 2. Man finde eine weitere meromorphe Funktion w mit der Eigenschaft $w(x)^2 = p(f(x))$. Dabei ist die holomorphe Abbildung $\tau : M^2 \to M^2$ hilfreich, die jeweils eines der Urbilder von f auf das andere abbildet.