Übungsblatt 2 - Präsenzaufgaben

Aufgabe 8

Man berechne $\int_\gamma \frac{dz}{1+z^2}$ für die vier Kreise γ: $|z| = 1/2$; $|z| = 2$; $|z-i| = 1$; $|z+i| = 1$.
Hinweis: Partialbruchzerlegung und Cauchysche Integralformel.

Aufgabe 9

Man berechne:

(a) $\int_{\gamma_1} \bar{z} dz$ entlang des Weges $\gamma_1(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$;

(b) $\int_{\gamma_2} (1+z) dz$ entlang des Weges $\gamma_2(t) = (1+i)t$, $t \in [0, 1]$;

Übungsblatt 2 - Hausaufgaben

Aufgabe 10

Sei f eine komplexe Funktion, die auf einer offenen Kreisscheibe $D \subset \mathbb{C}$ holomorph ist, $z_1, \ldots, z_n$ ihre Nullstellen mit den Ordnungen $p_1, \ldots, p_n$. Sei γ ein geschlossener Weg in D, der durch keinen der Punkte $z_1, \ldots, z_n$ geht. Zeige:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \operatorname{Ind}(\gamma, z_i),$$

wobei $\operatorname{Ind}(\gamma, z_i)$ der Umlaufindex von γ um z_i ist, der durch

$$\operatorname{Ind}(\gamma, z_i) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_i}.$$

berechnet werden kann. Hinweis: geeignete Faktorisierung von f.

Aufgabe 11

Man bestimme für die folgenden Funktionen $z \mapsto f(z)$ Lage und Art der isolierten Singularitäten sowie die zugehörigen Residuen:

a) $z^2/(z^4 - 16)$;

b) $(1 - \cos z)/z^n$ für $n = 1, \ldots, 4$;

c) $1/\cos(z^{-1})$.

Aufgabe 12

Man zeige mittels Residuenberechnung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$$

Hinweis: Wähle als Integrationsweg den Halbkreis in der oberen Halbebene mit Radius $r > 1$ vereinigt mit dem Intervall $[-r, r]$ der x-Achse.