Übungsblatt 3

Es sei Γ ein komplexes Gitter, welches von $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ erzeugt wird. Summen oder Produkte mit einem Stern sollen nur über die Gitterpunkte $\gamma \neq 0$ gebildet werden.

Aufgabe 13 (Elliptische Integrale)

Betrachte das Polynom $P(t) = 4t^3 - g_2 t - g_3 \in \mathbb{R}[t]$ mit den Gitterinvarianten $g_2 = 60\, G_4(\Gamma)$ und $g_3 = 140\, G_6(\Gamma)$ als Koeffizienten.

(a) Zeige, dass P drei paarweise verschiedene Nullstellen besitzt.

(b) Sei

$$I(x) := \int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}\,, \qquad x > 0$$

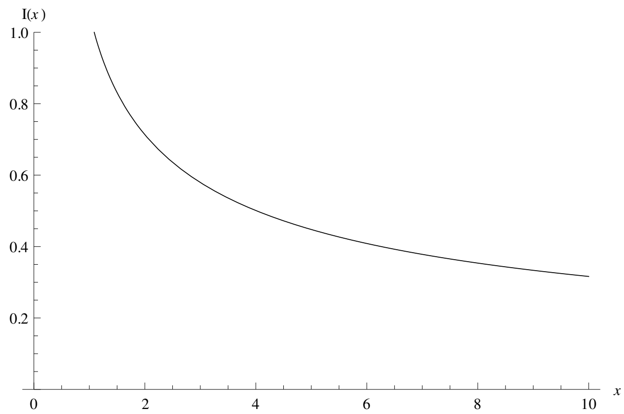
Zeige dass $\wp(I(x)) = x$ für alle $x \in (x_0, \infty)$ für ein $x_0 > 0$.

(c) Benutze das Additionstheorem für $\wp$ für die Herleitung einer Funktion $(x_1, x_2) \mapsto R(x_1, x_2)$ (abhängig von P), so dass

$$\int_{x_1}^\infty \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} + \int_{x_2}^\infty \frac{dt}{\sqrt{P(t)}} = \int_{R(x_1,x_2)}^\infty \frac{dt}{\sqrt{P(t)}}$$

(d) Beweise das Eulersche Additionstheorem

$$\int_0^{x_1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} + \int_0^{x_2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{R(x_1,x_2)} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$



Graph von $I(x)$ für $g_2 = g_3 = 1$.

(bitte wenden)

Aufgabe 14 (Die Weierstraßsche σ- und ζ-Funktion)

(a) Zeige, dass das Produkt

$$\sigma(z) \;:=\; z \prod\nolimits_{\gamma\in\Gamma}^{*} \left(1 - \frac{z}{\gamma}\right) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\gamma}\right)^2}$$

auf jeder Scheibe $|z| \leq R$ (für $R > 0$) gleichmäßig und absolut konvergiert und eine ganze Funktion, genannt *Weierstraßsche σ-Funktion*, definiert, die genau in den Gitterpunkten $\gamma = m\omega_1 + n\omega_2$ Nullstellen erster Ordnung besitzt.

(b) Zeige, dass die durch

$$\zeta(z) \;:=\; \frac{1}{z} + \sum\nolimits_{\gamma\in\Gamma}^{*} \left[\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2}\right],$$

definierte *Weierstraßsche ζ-Funktion* meromorph ist und genau in den Gitterpunkten Pole erster Ordnung mit dem Residuum 1 hat.

(c) Man beweise die Relationen

$$\zeta(z) \;=\; \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}, \quad \zeta'(z) \;=\; -\wp(z)\,.$$

Aufgabe 15 (Legendresche Relation)

Es existieren Funktionen $\eta, c : \Gamma \to \mathbb{C}$, die

$$\zeta(z+\gamma) \;=\; \zeta(z) + \eta(\gamma), \quad \sigma(z+\gamma) \;=\; c(\gamma)\cdot e^{z\eta(\gamma)}\sigma(z)$$

erfüllen. Für alle ganzen Zahlen m, n gibt es Konstanten η_1, η_2 derart, dass

$$\eta(m\omega_1 + n\omega_2) \;=\; m\cdot\eta_1 + n\cdot\eta_2$$

gilt, und beide lassen sich durch Integrale über die Weierstraßsche $\wp$-Funktion ausdrücken. Durch Integration über ein Periodenparallelogramm beweise man die *Legendresche Relation*

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 \;=\; 2\pi i\,.$$

Die Funktion $c(\gamma)$ kann man explizit berechnen, es gilt

$$c(m\omega_1 + n\omega_2) \;=\; (-1)^{mn+m+n} e^{(m\omega_1+n\omega_2)/2}.$$