Automorphe Formen und Riemannsche Flächen
Sommersemester 2013
Prof. Dr. Thomas Friedrich, Dr. Josua Groeger
02.05.2013

Übungsblatt 4

Aufgabe 16 (Komplexe Gitter)

Die Paare (ω_1, ω_2) bzw. $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ komplexer Zahlen erzeugen genau dann das gleiche Gitter in $\mathbb{C}$, wenn es eine Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

mit ganzzahligen Einträgen und $\det A = \pm 1$ gibt, die den Vektor (ω_1, ω_2) auf den Vektor $(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)$ abbildet.

Bem.: Die Gruppe $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z}) := \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\}$ heißt *Modulgruppe*. Sie stimmt mit den analytischen Automorphismen der oberen Halbebene überein. Meist wird es jedoch vorgezogen, mit $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ zu arbeiten, da nur sie als Matrizengruppe realisiert wird.

Aufgabe 17

Die Gruppe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ wird von den Matrizen $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ erzeugt.

Bemerkung: Um die Wirkung einer Gruppe G auf einer Menge M zu studieren, wählt man sich gewöhnlich eine sogenannte *Fundamentalmenge*, das ist eine Menge, die jede G-Bahn genau einmal schneidet. Um jedoch mit einer Menge mit guten topologischen Eigenschaften zu arbeiten, zieht man es für die $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ und ihre Untergruppen vor, mit *Fundamentalbereichen* zu arbeiten:

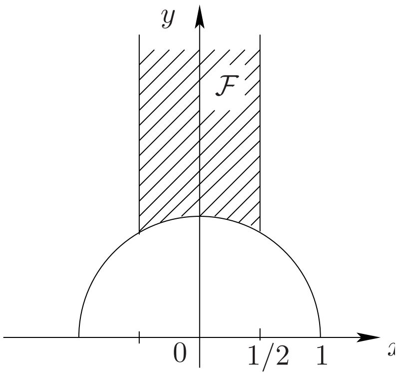
Definition. Eine abgeschlossene Teilmenge $\mathcal{F}$ von M heißt *Fundamentalbereich*, falls sie folgende Eischaften hat:

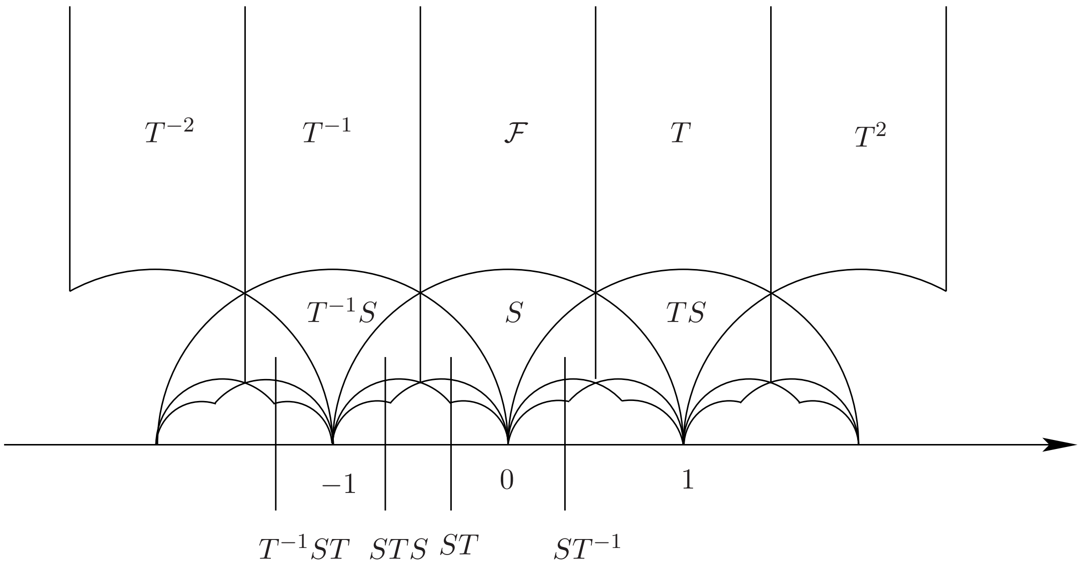
1. $\mathcal{F}$ schneidet jede G-bahn mindestens einmal;
2. je zwei innere Punkte von $\mathcal{F}$ liegen in verschiedenen G-Bahnen.

Aufgabe 18

Wir betrachten die Wirkung der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ auf der Poincaré-Halbebene $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$. Man beweise:

1. Ist $\tau' \in \mathcal{H}$, so existiert ein $\tau \in \mathcal{H}$, welches in der gleichen $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-Bahn wie τ' liegt und die folgenden Ungleichungen erfüllt:
$$|\tau| \geq 1, \quad |\tau + 1| \geq |\tau|, \quad |\tau - 1| \geq |\tau|\,.$$
2. die abgeschlossene Menge (siehe Abbildung)
$$\mathcal{F} := \{\tau \in \mathcal{H} : |\tau| \geq 1, \quad |\tau + \bar{\tau}| \leq 1\}$$
ist ein Fundamentalbereich für die $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-Wirkung auf $\mathcal{H}$.
3. Ist τ ein innerer Punkt von $\mathcal{F}$, so folgt aus $A\tau = \tau$ für ein A aus $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, dass A die Identität sein muss.





Die Bilder von $\mathcal{F}$ unter $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ überdecken die gesamte hyperbolische Ebene.