Übungsblatt 5

Die Umkehrbarkeit von Funktionen verhält sich im Komplexen anders, als man es aus der reellen Analysis gewöhnt ist, wird aber in der Theorie Riemannscher Flächen oft gebraucht. Dieses Übungsblatt soll die wichtigsten Eigenschaften zusammenstellen.

Definition: Ein komplexes *Gebiet* ist eine offene und zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Definition: Die Funktion $f(z)$ hat im Punkt z_0 eine a-Stelle k-ter Ordnung, falls sie dort in eine Potenzreihenentwicklung

$$f(z) \;=\; a + a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \ldots$$

mit $a_k \neq 0$ hat.

Aufgabe 19

Die Nullstellen einer in einem Gebiet D holomorphen, nicht konstanten Funktion liegen in D isoliert.

Aufgabe 20

Ist die Funktion $w = f(z)$ im Gebiet D holomorph und nicht konstant, so ist das Bild $f(D)$ wieder ein Gebiet.

Bemerkung: Dass das Bild einer zusammenhängenden Menge unter einer stetigen Abbildung ebenfalls zusammenhängend ist, wird natürlich als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 21

Nimmt die in z_0 holomorphe Funktion $f(z)$ den Wert $w_0 = f(z_0)$ von k-ter Ordnung an, so gibt es zu jedem genügend kleinen Kreis $\mathcal{K}$ um z_0 ein $\varepsilon > 0$, so dass jeder Punkt $w \neq w_1$ aus $|w - w_0| < \varepsilon$ als Bild von genau k verschiedenen Punkten aus dem Inneren von $\mathcal{K}$ auftritt.

Insbesondere gilt der Spezialfall: Ist $w = f(z)$ in z_0 holomorph und wird $w_0 = f(z_0)$ von 1. Ordnung angenommen, so gibt es eine Umgebung $U(z_0)$, die bijektiv und umkehrbar stetig auf eine Umgebung $V(w_0)$ von w_0 abgebildet wird.

Was ergibt sich für die *lokale* und die *globale* Umkehrbarkeit holomorpher Funktionen? Vergleichen Sie mit der reellen Situation und diskutieren Sie einige Beispiele (z. B. $f(z) = z^2$, $f(z) = z^3 \ldots$)

(bitte wenden)

Aufgabe 22

Sei D ein konvexes Gebiet, $f(z)$ in D holomorph und es gebe eine komplexe Zahl $a \neq 0$, so dass für alle $z \in D$ gilt: $|f'(z) - a| < |a|$. Dann ist f auf D global bijektiv.

Aufgabe 23

Ist die Funktion $w = f(z)$ in z_0 holomorph und wird $w_0 = f(z_0)$ von 1. Ordnung angenommen, so ist die Umkehrfunktion $z = \check{f}(w)$ in einer Umgebung $U(w_0)$ holomorph und $\check{f}(w)' = \frac{1}{f'(\check{f}(w))}$.