Automorphe Formen und Riemannsche Flächen
Sommersemester 2013
Prof. Dr. Thomas Friedrich, Dr. Josua Groeger
23.05.2013

Übungsblatt 6

Für ein komplexes Gitter Γ bezeichnen wir wie üblich

- die Eisenstein-Reihen $G_k = \sum^*_{\gamma\in\Gamma} \frac{1}{\gamma^k}$ für $k \geq 3$;
- die Gitterinvarianten $g_2 = 60G_4$ und $g_3 = 140G_6$;
- sowie $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$ und $j = \frac{g_2^3}{\Delta}$.

Da jedes Gitter äquivalent zu einem Gitter der Form $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ mit $\tau \in \mathcal{H}$ in der oberen Halbebene ist, lässt sich z.B. j auffassen als Funktion $j : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$.

Aufgabe 24 (Rekursionsformel für Eisensteinreihen)

Beweise folgende Aussagen für ein festes Gitter Γ.

(a) $G_k = 0$ für ungerade k.

(b) Die Koeffizienten b_n der Laurent-Reihe $\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^\infty b_n z^{2n}$ von $\wp$ um 0 sind gegeben durch

$$b_1 = \frac{g_2}{20}\,, \qquad b_2 = \frac{g_3}{28}\,, \qquad b_n = \frac{3}{(2n+3)(n-2)} \sum_{k=1}^{n-2} b_k b_{n-k-1} \quad (n \geq 3)$$

(c) Es gilt

$$(k^2-1)(k-6)G_k = 6\sum_{j=4}^{k-4}(j-1)(k-j-1)G_j G_{k-j}$$

für $k \geq 8$, so dass sich alle G_k rekursiv aus G_4 und G_6 berechnen lassen.

Aufgabe 25 (Uniformisierungssatz)

(a) Zeige dass die Funktion $j : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ analytisch ist und berechne $j(i) = 1$ sowie $j(e^{2\pi i/3}) = 0$.

(b) Zeige die Invarianz $j(A\tau) = j(\tau)$ von j unter der Wirkung von $A \in SL(2,\mathbb{Z})$ und berechne $\lim_{\mathrm{Im}\tau\to\infty} |j(\tau)| = \infty$.

Hinweis: Dabei stößt man auf die *Riemannsche ζ-Funktion* $\zeta(s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ $(\mathrm{Re}s > 1)$, deren spezielle Werte

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\,, \qquad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

hier verwendet werden dürfen.

(c) Beweise dass j surjektiv ist.

(d) Folgere den *Uniformisierungssatz*: Für alle komplexen Zahlen $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a^3 - 27b^2 \neq 0$ gibt es ein Gitter Γ, so dass $a = g_2(\Gamma)$ und $b = g_3(\Gamma)$.

(bitte wenden)

Aufgabe 26 (Weitere Eigenschaften von j)

(a) Zeige dass j einen analytischen Isomorphismus $\mathcal{H}/SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ induziert.

(b) Setze den Isomorphismus aus (a) so fort, dass ein analytischer Isomorphismus auf die Riemannsche Zahlenkugel $S^2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ gegeben ist.