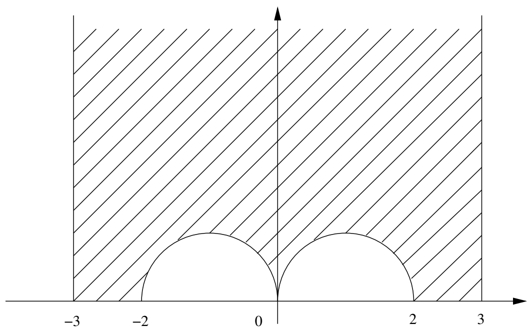
Automorphe Formen und Riemannsche Flächen
Sommersemester 2013
Prof. Dr. Thomas Friedrich, Dr. Josua Groeger
30.05.2013

Übungsblatt 7

Aufgabe 27

Sei Γ die von den Elementen $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ erzeugte Gruppe. Sie liegt in $SL(2, \mathbb{Z})$ und ist deswegen eine Fuchssche Gruppe. Man beweise, dass die unten abgebildete Menge ein Fundamentalbereich von Γ ist, dass $0, \infty$ parabolisch sind, nicht aber $5/2$, und man schließe, dass Γ in $SL(2, \mathbb{Z})$ unendlichen Index hat.



Aufgabe 28

Sei N eine positive ganze Zahl. Wir definieren

$$\Gamma(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \;\middle|\; a, d \equiv 1;\, b, c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

(a) Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeige

$$[SL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma(p)] = \#SL(2, \mathbb{Z}/pZ) = (p^2 - 1)p$$

Wie lautet die analoge Aussage für p^m $(m \in \mathbb{N})$?

(b) Beweise die allgemeine Index-Formel

$$[SL(2, \mathbb{Z}) : \Gamma(N)] = N^3 \cdot \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

wobei das Produkt über die Primteiler von N geht.

(bitte wenden)

Aufgabe 29

Sei L ein Gitter in $\mathbb{C}$ und $\wp(z)$ seine $\wp$-Funktion. Betrachte die projektive Kubik

$$P := \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) : x_0 x_2^2 = 4x_1^3 - g_2 x_0^2 x_1 - g_3 x_0^3\}$$

(a) Beweise dass P eine Riemannsche Fläche definiert, falls $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

(b) Betrachte die Abbildung $\mu : \mathbb{C} \setminus L \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})\,,\ z \mapsto [1 : \wp(z) : \wp'(z)]$. Man bestimme den Limes $\lim_{z\to 0} \mu(z)$ und setze μ zu einer Funktion auf $\mathbb{C}$ fort. Man zeige, dass dies eine Abbildung $\hat{\mu} : \mathbb{C}/L \to P$ induziert.

(c) Zeige, dass $\hat{\mu}$ ein analytischer Isomorphismus ist.