Automorphe Formen und Riemannsche Flächen
Sommersemester 2013
Prof. Dr. Thomas Friedrich, Dr. Josua Groeger
06.06.2013

Übungsblatt 8

Aufgabe 30

Sei $p(z) = (z-a_1)\cdot\ldots\cdot(z-a_{2k+1})$ ein Polynom von ungeradem Grad, $M^*_{p,2}$ die zugehörige nicht kompakte Riemannsche Fläche zu $n = 2$.

(a) Man beweise, dass die Kompaktifizierung $M_{p,2}$ von $M^*_{p,2}$ duch Hinzunahme von genau einem Punkt entsteht.

(b) Man beweise, dass $\omega = \sqrt{p(z)} : \; M_{p,2} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ im einzigen Punkte $\omega^{-1}(\infty)$ einen Verzweigungspunkt hat.

Aufgabe 31

Sei $p(z)$ ein Polynom ohne mehrfache Nullstellen vom Grad m. Auf der zu p assoziierten (nicht kompakten) Riemannschen Fläche $M^*_{n,p}$

$$M^*_{n,p} \;=\; \{(z,\omega) \in \mathbb{C}^2 : \; \omega^n = p(z)\}$$

betrachten wir die beiden Koordinaten-Funktionen

$$Z, \Omega : \; M^*_{n,p} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad Z(z,\omega) \;:=\; z, \quad \Omega(z,\omega) \;:=\; \omega\,.$$

(a) Man bestimme die Verzweigungspunkte von Z mit Vielfachheiten und folgere

$$\deg(Z) \;=\; n, \quad b^*(Z) \;=\; m(n-1).$$

(b) Man bestimme die Verzweigungspunkte von Ω mit Vielfachheiten und folgere

$$\deg(\Omega) \;=\; m, \quad b^*(\Omega) \;=\; n(m-1).$$

(c) Sei $M_{n,p}$ eine Kompaktifizierung von $M^*_{n,p}$, auf die Z und Ω sich holomorph fortsetzen lassen. Man beweise die Relation

$$m + b_\infty(Z) \;=\; n + b_\infty(\Omega)\,.$$

Aufgabe 32

Man bestimme das Geschlecht der Kompaktifizierungen folgender Riemannscher Flächen unter Verwendung der holomorphen Funktionen Z *und* Ω:

(a) $p(z) = (z-a_1)\cdot\ldots\cdot(z-a_{2k})$, $n = 2$.

(b) $p(z) = z(1-z)$, $n = 2g+1$.

(c) $p(z) = z(z-1)(z-2)(z-3)(z-4)(z-5)$, $n = 3$.

(d) $p(z) = z^4 - 1$, $n = 4$.

(bitte wenden)

Aufgabe 33

Sei $f : M^2 \to \bar{M}^2$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen zwei zusammenhängenden kompakten Riemannschen Flächen gleichen Geschlechts g. Man beweise:

(a) Ist $g = 1$, so ist f eine unverzweigte Überlagerung.

(b) Ist $g \geq 2$, so ist f biholomorph.