Automorphe Formen und Riemannsche Flächen
Sommersemester 2013
Prof. Dr. Thomas Friedrich, Dr. Josua Groeger
13.06.2013

Übungsblatt 9

Aufgabe 34 (Komplexe Tori)

Gegeben seien zwei komplexe Gitter L und L', deren zugeordnete Punkte τ bzw. τ' in der oberen Halbebene $\mathcal{H}$ sowie die komplexen Tori $\mathbb{C}/L$ bzw. $\mathbb{C}/L'$. Bekanntlich sind alle solchen Tori homöomorph zu $S^1 \times S^1$, während die komplexe Struktur vom Gitter abhängt:

(a) Beschreibe alle holomorphen Abbildungen $\mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/L'$.

(b) Folgere, dass die komplexen Strukturen von $\mathbb{C}/L$ und $\mathbb{C}/L'$ genau dann äquivalent sind, wenn τ und τ' im selben $SL(2,\mathbb{Z})$-Orbit liegen.

Aufgabe 35 (Harmonische Differentialformen)

Sei M eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht g und $\mathcal{H}^1(M)$ der Raum der (reellen) harmonischen 1-Formen auf M. Wir wollen als bekannt voraussetzen, dass $\mathcal{H}^1(M)$ die Dimension $2g$ hat und dass es möglich ist, $2g$ geschlossene Kurven $a_1, \dots, a_g$ und $b_1, \dots, b_g$ auf M sowie eine Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_{2g}$ von $\mathcal{H}^1(M)$ zu finden derart, dass

$$\int_{a_k} \alpha_j \; = \; \delta_{k,j}, \qquad \int_{b_k} \alpha_j \; = \; \delta_{k,j-g}.$$

gilt. Die Kurven $a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g$ werden dann eine *Homologie-Basis* genannt. Zeige:

(a) Sind θ_1 und θ_2 zwei geschlossene 1-Formen auf M, so gilt

$$\int_M \theta_1 \wedge \theta_2 \; = \; \sum\nolimits_{i=1}^{g} \left[\int_{a_j} \theta_1 \int_{b_j} \theta_2 - \int_{b_j} \theta_1 \int_{a_j} \theta_2 \right].$$

<u>Hinweis:</u> Ersetze θ_1 und θ_2 durch einen harmonischen Vertreter.

(b) Ist θ harmonisch, so gilt für das L^2-Skalarprodukt von Differentialformen

$$||\theta||^2 \; = \; \sum\nolimits_{i=1}^{g} \left[\int_{a_j} \theta \int_{b_j} *\bar{\theta} - \int_{b_j} \theta \int_{a_j} *\bar{\theta} \right].$$

(c) Sei θ eine holomorphe 1-Form. Wenn alle Integrale $\int_{a_j} \theta$, $j = 1, \dots, g$ verschwinden, dann folgt $\theta = 0$.

(d) Durch $\gamma_{kj} = \langle \alpha_k, \alpha_j \rangle = \int_M \alpha_k \wedge *\alpha_j$ wird eine $2g \times 2g$-Matrix Γ definiert, welche symmetrisch und positiv definit ist.